

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

FERNANDO SILVA DE MOURA

Identificação da matriz de transição do modelo de evolução
utilizado no filtro estendido de Kalman aplicado à tomografia por
impedância elétrica

São Paulo

2006

FERNANDO SILVA DE MOURA

**Identificação da matriz de transição do modelo de evolução
utilizado no filtro estendido de Kalman aplicado à tomografia por
impedância elétrica**

Trabalho de formatura apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo para
obtenção do título de engenheiro mecânico

Área de Concentração: Engenharia mecânica

Orientador: Prof. Dr. Raul Gonzalez Lima

São Paulo

2006

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

FICHA CATALOGRÁFICA

Moura, Fernando Silva de

Identificação da matriz de transição do modelo de evolução utilizado no filtro estendido de Kalman aplicado à tomografia por impedância elétrica / F.S. de Moura. – São Paulo, 2006.
141 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Tomografia por impedância elétrica 2.Filtro de Kalman
3.Modelo de evolução 4.Estimação não linear I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

Aos meus pais e irmãos

AGRADECIMENTOS

Ao professor Dr. Raul Gonzalez Lima com o quem trabalho desde o início da graduação e sempre esteve presente para dar conselhos, explicações e direção aos meus trabalhos;

ao amigo Dr. Julio Cesar Ceballos Aya com quem tenho a satisfação de trabalhar todos os dias;

aos amigos do grupo de pesquisa, sem os quais este trabalho não seria possível;

a todos os professores com quem já tive aula até a presente data, pela dedicação e paciência na difícil tarefa de construir cidadãos. Sem eles, hoje não estaria no final desta etapa da minha vida.

"Tenha em mente que tudo que você aprende na escola é trabalho de muitas gerações. Receba essa herança, honre-a, acrescente a ela e, um dia, fielmente, deposite-a nas mãos de seus filhos."

Albert Einstein (1879–1955)

RESUMO

A Tomografia por Impedância Elétrica (TIE) é um método que tenta suprir a necessidade de observação em tempo real das condições pulmonares através das propriedades elétricas do corpo humano e dos gases presentes no ar atmosférico. Existem atualmente dois grupos de algoritmos para a estimação do estado dos pulmões: os métodos *relativos*, que estimam a variação das propriedades elétricas do domínio observado e os métodos *absolutos*, que estimam os seus valores absolutos. Entre vários algoritmos absolutos, destacam-se os filtros de Kalman que abordam o problema de estimação dos parâmetros de um modelo adotado para o sistema sob o ponto de vista probabilístico através do método de mínima variância do erro de estimação. Os filtros de Kalman têm a característica de poder incluir as incertezas de medida dos sensores e os erros do modelo adotado para o sistema. Para que este filtro possa ser utilizado é necessário um modelo de evolução temporal do sistema e até hoje, nas aplicações biomédicas, o único modelo utilizado é o de passeio aleatório. Este trabalho estuda o uso de imagens provenientes de um algoritmo relativo para estimar uma matriz de transição de estado para o modelo de evolução temporal para ser utilizado no Filtro Estendido de Kalman (FEK), uma implementação não linear do filtro de Kalman. As imagens geradas pelo algoritmo relativo são utilizadas para determinar uma matriz de transição de estado e então é utilizada no FEK para estimar o estado do sistema. Os ensaios são realizados através de simulações numéricas do comportamento temporal de um domínio em estudo. São adicionados ruídos nas medidas para simular as incertezas dos instrumentos e erros de modelo. Devido aos problemas numéricos para a determinação da matriz de transição, usa-se a regularização de Tikhonov. Mostra-se neste trabalho que o uso desta regularização adiciona amortecimento artificial à matriz de transição. Os resultados do FEK mostram que o uso da matriz de transição melhora a estabilidade e acelera a convergência do filtro. Mostra-se, também, que o resíduo médio permanece dentro de três vezes o desvio padrão da incerteza de medida assumida no filtro, o que caracteriza convergência estatística.

palavras-chave: tomografia por impedância elétrica, Filtro Estendido de Kalman, modelo de evolução, estimação não linear de parâmetros

ABSTRACT

The Electrical Impedance Tomography (EIT) is a method that tries to supply the observation necessity of lung conditions from the human body electrical properties and from the gases in the atmosphere in real time. Two algorithm groups to estimate the lung condition exist today: the relatives, that estimate electrical property variations of the domain in study, and the absolutes, that estimate the absolute values. Among various absolute algorithms, there are the Kalman filters - that approach the model parameters estimation problem by the probabilistic point of view, with the minimum variance of estimation error. The Kalman filters may include the sensors measurements uncertainties and the adopted model errors. It's necessary a system's temporal evolution model for this filter to be used, and until today, in the biomedical applications, the only used model was the random walk. This paper studies the use of images proceeding from a relative algorithm to estimate a state transition matrix for the time evolution model to be used in the Extended Kalman Filter (FEK), a non linear implementation of the Kalman filter. The images generated by the relative algorithm are used to determine a state transition matrix and then, it's used in the FEK to estimate the system state. The tests are carried out with numerical simulations of the time behavior of a domain in study. Noises in the measures are added to simulate uncertainties of the instruments and model errors. Leading to the numerical problems for the transition matrix determination, Tikhonov regularization is used. This study shows that the use of this regularization adds artificial damping to the transition matrix. The FEK results show that the use of the transition matrix improves the stability and speeds up the convergence of the filter. It also reveals that the averaged residue remains inside of three times the standard deviation of the uncertainty of measure assumed in the filter, what characterizes statistical convergence.

key-words: electrical impedance tomography, Extended Kalman Filter, evolution model, non linear parameter estimation

SUMÁRIO

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Símbolos	1
Lista de Siglas	4
 I Considerações iniciais	 5
1 Introdução e objetivos	6
1.1 Objetivos	7
 2 Tomografia por Impedância Elétrica (TIE)	 9
2.1 TIE na área biomédica	9
2.2 Identificação e ajuste de parâmetros	11
2.2.1 Problema direto e inverso	13
2.2.2 Problema mal-posto	15
2.3 O estado observado na TIE	16
2.4 Limitações e vantagens da TIE	19
2.5 Padrão de corrente e de tensão	21

2.6	Estimação de imagens	23
3	Filtro de Kalman na TIE	26
II	Base teórica	29
4	Modelos adotados	30
4.1	Modelo do domínio	30
4.2	Modelo do eletrodo	33
4.3	Discretização do domínio	34
4.4	Discretização dos eletrodos	36
5	<i>Phantom</i> numérico	38
5.1	Solução do problema direto	39
6	Filtro estendido de Kalman	40
6.1	Incógnitas do problema inverso	40
6.2	Método dos mínimos quadrados ponderados (MMQP)	41
6.3	Filtro estendido de Kalman no caso discreto - discreto	42
6.3.1	Modelo de evolução do estado e do erro	42
6.3.2	Modelo de observação	43
6.3.3	Atualização do filtro	45
6.3.4	Equações do filtro	47
6.4	Características e influências de $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$	48
6.4.1	Matriz de covariância do erro de estimação - $\mathbf{P}$	48

6.4.2	Matriz de covariância do ruído do estado - $\mathbf{Q}$	48
6.4.3	Matriz de covariância do ruído de medida - $\mathbf{R}$	49
7	Modelo de evolução do estado	50
7.1	Modelo de evolução do sistema	51
7.1.1	Tempo contínuo	52
7.1.2	Tempo discreto	53
7.2	Ruído e erros de medidas	56
7.3	Estado expandido	57
8	Seqüência de imagens	58
8.1	Algoritmo caixa-preta	59
8.2	Algoritmo	60
8.3	Determinação de $\mathbb{B}$	62
III	Metodologia e material de ensaio	64
9	Simulações numéricas	65
9.1	Algoritmo completo	65
9.2	Ensaio 1	67
9.2.1	Parte 1A	67
9.2.2	Parte 1B	69
9.2.3	Parte 1C	70
9.3	Ensaio 2	71

9.3.1	Parte 2A	71
9.3.2	Parte 2B e 2C	71
9.4	Critério de desempenho	72
IV Resultados, discussões e conclusões		73
10	Simulações numéricas	74
10.1	Ensaio 1	74
10.1.1	Parte 1A	74
10.1.1.1	Situação 1: sem ruído aditivo no estado	76
10.1.1.2	Situação 2: com ruído uniforme aditivo no estado $\sigma = 0.865\Omega m$	77
10.1.1.3	Situação 3: com ruído uniforme aditivo no estado $\sigma = 1.72\Omega m$	78
10.1.2	Parte 1B	79
10.1.2.1	Resultados do caixa-preta	81
10.1.2.2	Situação 1: sem ruído uniforme aditivo nas tensões	82
10.1.2.3	Situação 2: com ruído uniforme aditivo nas tensões	83
10.1.3	Parte 1C	84
10.1.3.1	Resultados do caixa-preta	86
10.1.3.2	Situação 1: sem ruído aditivo nas tensões	87
10.1.3.3	Situação 2: com ruído uniforme aditivo nas tensões	88
10.1.4	Influência da Regularização de Tikhonov	89
10.1.5	Conclusões do ensaio 1	96
10.2	Ensaio 2	97

10.2.1	Parte 2A	97
10.2.1.1	Situação 1: sem ruído no estado.....	100
10.2.1.2	Situação 2: com ruído uniforme no estado $\sigma = 0.865\Omega m$	101
10.2.1.3	Situação 3: com ruído uniforme no estado $\sigma = 1.72\Omega m$	102
10.2.2	Parte 2C	103
10.2.2.1	Ajuste de R	105
10.2.2.2	Ajuste de Q	107
10.2.3	Parte 2B	110
10.2.4	Comparação entre o modelo proposto e o passeio aleatório.....	116
10.2.5	Conclusões do ensaio 2	118
11	Discussões, comentários finais e sugestões.....	119
	Referências	123

LISTA DE FIGURAS

Figura - 2.1	Diagrama típico de um problema direto.	13
Figura - 2.2	Diagrama típico de um problema inverso.	13
Figura - 2.3	Domínio de interesse.	16
Figura - 2.4	Método dos padrões vizinhos	21
Figura - 4.1	Discretização da interface	36
Figura - 9.1	Domínio estudado.	68
Figura - 9.2	Evolução verdadeira do estado.	68
Figura - 9.3	Domínio estudado.	69
Figura - 9.4	Malha utilizada no <i>phantom</i>	70
Figura - 9.5	Domínio considerado (mm).	70
Figura - 10.1	Parte 1A sem ruído aditivo.	76
Figura - 10.2	Parte 1A com ruído uniforme aditivo $\sigma = 0.865\Omega m$	77
Figura - 10.3	Parte 1A com ruído uniforme aditivo $\sigma = 1.72\Omega m$	78
Figura - 10.4	Evolução temporal do estado estimado pelo caixa-preta.	79
Figura - 10.5	Imagens obtida pelo caixa-preta (Ωm).	81
Figura - 10.6	Parte 1B sem ruído uniforme aditivo.	82
Figura - 10.7	Parte 1B com ruído uniforme aditivo.	83

Figura - 10.8 Evolução temporal do estado estimado pelo caixa-preta.	84
Figura - 10.9 Imagens obtida pelo caixa-preta (Ωm).	86
Figura - 10.10 Parte 1C sem ruído aditivo.	87
Figura - 10.11 Parte 1C com ruído uniforme aditivo.	88
Figura - 10.12 Diagrama de Nyquist dos auto-valores de Φ nas partes 1B e 1C	90
Figura - 10.13 Diagrama de Nyquist e evolução temporal do estado ($\alpha = 10^0$).	92
Figura - 10.14 Modos dominantes da matriz Φ nas partes 1B e 1C	93
Figura - 10.15 Modos dominantes da matriz Φ nas partes 1B e 1C	94
Figura - 10.16 MAC dos auto-vetores nos ensaios 1B e 1C com $\alpha = 10^0$	95
Figura - 10.17 Resultados do ensaio.	100
Figura - 10.18 Resultados do ensaio.	101
Figura - 10.19 Resultados do ensaio.	102
Figura - 10.20 Evolução do resíduo de observação para diversos valores de $\hat{\mathbf{R}}_k$	106
Figura - 10.21 Evolução do estado e estado final da simulação	108
Figura - 10.22 Evolução do resíduo para diversos valores de $\hat{\mathbf{Q}}_0$	109
Figura - 10.23 Estimação do estado para o ensaio 2B-01.	111
Figura - 10.24 Resíduo de observação de cada sensor nos ensaios.	112
Figura - 10.25 Estimação do estado para o ensaio 2B-02.	114
Figura - 10.26 Resultados dos ensaios 2B-03 e 2B-04.	116
Figura - 10.27 Resultados do passeio aleatório	117

LISTA DE TABELAS

Tabela 10.1 Parâmetros utilizados no FEK.	97
Tabela 10.2 Parâmetros utilizados no FEK.	105
Tabela 10.3 Parâmetros utilizados no FEK.	107
Tabela 10.4 Parâmetros utilizados no FEK.	110
Tabela 10.5 Parâmetros utilizados no FEK.	114
Tabela 10.6 Parâmetros utilizados no FEK.	115

LISTA DE SÍMBOLOS

Γ	domínio de interesse
$\partial\Gamma$	bordo do domínio de interesse
Z_r	Impedância complexa
V_r	fasor de tensão elétrica
I_r	fasor de corrente elétrica
ρ	resistividade elétrica do material
ϱ	reatividade elétrica do material
e	número de eletrodos
σ	condutividade elétrica do material
ϵ	permitividade elétrica do material
μ	permeabilidade magnética do material
q	densidade de carga livre
$\mathbf{E}$	campo elétrico
$\mathbf{B}$	densidade de fluxo magnético, matriz de retroprojeção
$\mathbf{J}$	densidade de corrente livre
ω	frequência angular
I_i	corrente elétrica que atravessa o i -ésimo eletrodo
$\partial\Gamma_i$	região do bordo do domínio coberto pelo i -ésimo eletrodo
$\hat{\mathbf{n}}$	versor normal ao bordo do domínio orientado para fora
z_i	impedância de contato do i -ésimo eletrodo
t	espessura da camada que representa a interface eletrodo-pele
n	número de elementos da malha de elementos finitos
m	número de nós da malha de elementos finitos
V	potencial elétrico
v_i	potencial elétrico no i -ésimo elemento da malha
a, b, c	coeficientes interpoladores
f_i	função de forma
A_i	área do i -ésimo elemento da malha
π_i	energia potencial presente no i -ésimo elemento da malha

$\mathbf{F}$	matriz gradiente das funções de forma
$\tilde{\mathbf{v}}_i$	vetor de tensões do i -ésimo elemento da malha
$\tilde{\mathbf{Y}}_i$	matriz de condutividade local do i -ésimo elemento da malha
h	altura dos elementos finitos
η, ϑ	coeficientes geométricos
$\mathbf{Y}$	matriz de condutividade global
$\boldsymbol{\rho}$	vetor de resistividade discretizada
$\tilde{\mathbf{Y}}^e$	matriz de condutividade local dos eletrodos
p	número de padrões de corrente
$\boldsymbol{\rho}^*$	vetor de resistividade verdadeira
$\mathbf{I}$	vetor de corrente elétrica injetada
$\mathbf{v}$	vetor de tensões
$\bar{\boldsymbol{\rho}}$	estado solução do método dos mínimos quadrados
Φ	matriz de transição de estado
ξ	vetor de incerteza do estado
$\mathbf{Q}$	matriz de covariância do estado
$\mathbf{P}$	matriz de covariância do erro de estimação
$\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\rho}^0$	estado de referência para linearização
$\tilde{\mathbf{H}}_j$	matriz de sensibilidade de um padrão de corrente
$\tilde{\mathbf{H}}$	matriz de sensibilidade considerando todos os padrões de corrente
$\boldsymbol{\nu}$	vetor de ruído das medidas dos sensores
$\mathbf{R}$	matriz de covariância do ruído das medidas dos sensores
$\mathbf{z}$	vetor de medidas nominais
$\mathbf{R}$	matriz de covariância do ruído das medidas
$\mathbb{I}$	matriz identidade
$\mathbf{G}$	ganho do filtro de Kalman
$\mathbf{M}$	matriz de inércia
$\mathbf{C}$	matriz de amortecimento
$\mathbf{K}$	matriz de rigidez
$\hat{\boldsymbol{\rho}}$	vetor de resistividade expandido
$\mathbf{A}$	matriz dinâmica no tempo contínuo
s e s^*	auto-valores conjugados
$\bar{\boldsymbol{\rho}}$ e $\bar{\boldsymbol{\rho}}^*$	auto-vetores conjugados
T	período de amostragem

Δt	intervalo de tempo
$\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}^+$	matrizes de seqüências temporais de resistividade
$\bar{\mathbf{X}}$ e $\bar{\mathbf{X}}^+$	matrizes de auto-vetores escalados
Σ	matriz de auto-valores no tempo contínuo
Σ_d	matriz de auto-valores no tempo discreto
$\mathbf{A}_d$	matriz dinâmica no tempo discreto
α, β	parâmetros de regularização
$\mathbb{B}$	matriz de retroprojeção
$\mathbf{v}_j^0$	vetor de tensões de referência no j -ésimo padrão de corrente
$\delta\rho_i$	perturbação de resistividade do i -ésimo elemento
$\delta\rho$	vetor de perturbação de resistividade
$\mathbf{v}_j^i$	vetor de tensões perturbada no j -ésimo padrão de corrente
$\mathbf{v}^0$	vetor agrupado de tensões de referência
$\mathbf{v}^i$	vetor agrupado de tensões perturbadas
ψ	vetor de perturbação de resistividade normalizado
θ	vetor de tensões normalizado
Ψ	matriz de perturbação de resistividade normalizado
Θ	matriz de tensões normalizado
D	matriz diferença
F	matriz filtro espacial passa alta
S	matriz de sensibilidade uniforme
$\mathbf{e}_k$	vetor erro entre o estado verdadeiro e a estimativa
$\bar{e}$	erro médio
σ_{e_k}	desvio padrão do erro médio
r	resíduo normalizado
λ	fator de escala entre matrizes
γ	fator de sub-relaxação

LISTA DE SIGLAS

TIE	Tomografia por Impedância Elétrica
FK	Filtro linearizado de Kalman
FEK	Filtro Estendido de Kalman
RI	Regiões de Interesse
UTI	Unidades de Tratamento Intensivo
SI	Sistema Internacional de Unidades
MMQP	método dos mínimos quadrados ponderados
MAC	<i>Modal Assurance Criterion</i>
UKF	<i>Unscented Kalman Filter</i>

PARTE I

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

1 INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

Em muitos casos, observar diretamente o interior de um sistema dinâmico ao longo do tempo sem que se tenha a possibilidade de abrir ou inserir câmeras e outros sensores no seu interior pode ser muito difícil, senão impossível. Para essas e outras situações é que desenvolveram-se técnicas não invasivas de observação, entre estas a Tomografia por Impedância Elétrica (TIE).

A TIE consiste em uma técnica não invasiva para observar um sistema dinâmico ao longo do tempo. Neste caso, observar significa, teoricamente, conseguir determinar o estado de um sistema¹ ou de parte dele em qualquer instante de tempo, seja no caso discreto ou contínuo no tempo, de forma que seja possível obter informações que possam ser úteis de alguma forma. Na prática, como será visto, apenas uma estimativa do estado do sistema é obtido com a técnica utilizada. Além disto, para que este tipo de tomografia seja funcional, as características do sistema que se queira observar devem ter uma relação com as propriedades eletromagnéticas do mesmo.

Por tratar-se de um método robusto de observação, a TIE vem sendo estudada para aplicações em diversas áreas. Cheney, Isaacson e Newell(1) citam a possibilidade de utilizar a TIE em monitoramento não invasivo das funções cardíacas e de fluxo sanguíneo, detecção de hemorragias internas, exame de câncer de mama, estudo do esvaziamento do estômago, detectar acúmulo de fluido pélvico, para determinar o contorno que separa tecidos vivos e mortos e aperfeiçoamento do exame de encefalograma. Entre as aplicações não clínicas, os autores citam o monitoramento de escoamento multifásico, localização

¹Estado de um sistema é explicado na seção 2.3.

de depósitos de minerais no solo, monitoramento da proliferação de contaminantes no solo, ensaios não destrutivos para a detecção de falhas em componentes mecânicos, para o acompanhamento do processo de cura de adesivos e controle de processos químicos. Neste trabalho maior ênfase será dada às aplicações biomédicas, mais especificamente ao monitoramento das condições pulmonares.

A TIE procura estimar o campo de resistividade/condutividade elétrica no interior de uma região fechada de interesse através da distribuição da diferença de potencial elétrico² medido no contorno deste domínio quando uma distribuição de corrente elétrica³ é injetada pelo mesmo contorno, ou vice-versa.

Sob o ponto de vista de engenharia, a TIE tenta resolver um problema inverso, mal condicionado e não linear, necessitando então de métodos numéricos para sua solução. Dois tipos de métodos de solução de problemas inversos podem ser utilizados: o *estático* é usado quando as propriedades elétricas do meio não variam no intervalo de tempo em que os dados necessários para a estimação do estado em um instante são coletados; o *dinâmico* é usado quando estas variações estão presentes no momento de coleta dos dados (2).

1.1 Objetivos

Este trabalho tem o objetivo desenvolver um algoritmo baseado no filtro estendido de Kalman (FEK) para a TIE e investigar a possibilidade de utilizar um algoritmo relativo e estático para identificar uma matriz de transição de estado usada no modelo de evolução temporal. Justifica-se tal investigação pelo sucesso do FEK em estimar imagens médicas através dos trabalhos de Vauhkonen, Karjalainen e Kaipio(2), Kaipio, Karjalainen e Somersalo(3), Trigo(4), Kim et al.(5). Todos estes trabalhos utilizaram o passeio aleatório como modelo de evolução do estado e tiveram problemas de estabilidade numérica, convergência e acuidade das imagens. Com este estudo, espera-se que um modelo de evolução mais fidedigno possa trazer estabilidade para o FEK, que se

²A *diferença de potencial elétrico* medida nos eletrodos será doravante chamado de *tensão*.

³O termo *corrente elétrica* será doravante chamado de *corrente*.

traduz em convergência mais rápida e melhores imagens.

O trabalho está dividido em 4 partes principais. Na Parte I, o Capítulo 1 apresenta a introdução do trabalho e os objetivos do trabalho, enquanto que o Capítulo 2 apresenta a TIE, destacando seu funcionamento, aplicabilidade, características, vantagens e desvantagens. O Capítulo 3 apresenta o filtro de Kalman aplicado à tomografia por impedância elétrica e os principais trabalhos publicados sobre o assunto nesta área.

A parte II apresenta a formulação teórica que é usada no trabalho. O Capítulo 4 apresenta os modelos adotados para o domínio, para os eletrodos e o uso do método dos elementos finitos nestes modelos. O Capítulo 5 apresenta o *phantom* numérico utilizado para simular a aquisição de dados feita pelo equipamento de tomografia e o Capítulo 6 apresenta o equacionamento do FEK para um sistema discreto no tempo e no espaço. Apresenta também os efeitos das matrizes de covariância utilizadas no filtro.

No Capítulo 7 é feito o desenvolvimento do modelo de evolução adotado no trabalho e apresenta as equações do FEK usando o estado expandido. O Capítulo 8 mostra o equacionamento do método relativo adotado para a geração das imagens que serão utilizadas para gerar a matriz de transição do estado.

Na parte III, o Capítulo 9 apresenta a sequência de etapas para a implementação completa do algoritmo de determinação da matriz de transição e do uso do FEK. Apresenta também os ensaios a serem realizados para testar os algoritmos.

Na parte IV, o Capítulo 10 mostra os resultados e conclusões obtidos em cada ensaio realizado e o Capítulo 11 finaliza o trabalho apresentando as discussões e conclusões do trabalho.

2 TOMOGRAFIA POR IMPEDÂNCIA ELÉTRICA (TIE)

Este capítulo tem o objetivo de situar o leitor a respeito da TIE, trazer os princípios de funcionamento do sistema juntamente com alguns resultados obtidos por diversos pesquisadores, tanto sob o ponto de vista de estimação de parâmetros quanto sob o ponto de vista clínico.

2.1 TIE na área biomédica

Pacientes com danos severos nos pulmões estão sujeitos à ocorrência de mudanças significativas no processo respiratório devido a ocorrência de atelectasia¹ ou pneumotórax², que podem causar inflamações do parênquima. Nestas circunstâncias, segundo Amato et al.(6), a detecção precoce a fim de evitar o colapso e o sobre distendimento dos alvéolos é fundamental para uma estratégia eficaz de proteção dos pulmões, resultando em um aumento das funções pulmonares e aumento do índice de sobrevivência destes pacientes. Esta estratégia é fundamental em Unidades de Tratamento Intensivo (UTI), onde os médicos precisam ajustar manualmente os parâmetros dos equipamentos de ventilação mecânica (vazão de ar e pressão). Trigo, Lima e Amato(7) comentam que as condições do paciente podem mudar drasticamente durante o dia e até mesmo após um intervalo de tempo de poucos ciclos respiratórios e um ajuste inapropriado do comportamento da pressão imposta pelo equipamento é suficiente

¹Colabamento dos alvéolos de parte ou de todo o pulmão. Colabamento é o fechamento dos alvéolos devido a baixa pressão do ar dentro dos alvéolos.

²Presença de ar no espaço pleural (região existente entre a cavidade torácica e os pulmões).

para causar inflamação severa ou mesmo ruptura dos tecidos pulmonares, causando eventualmente o pneumotórax. Este diagnóstico requer muitas imagens durante o ciclo cardíaco, que é mais curto que o ciclo respiratório. Infelizmente, métodos convencionais de exposição com raios-X e métodos clínicos corriqueiros em leitos de UTI falham em conseguir detectar tais ocorrências anormais para os pulmões.

Atualmente, a tomografia computadorizada por raios-X continua sendo o melhor método para detectar tais anormalidades, apesar dos problemas associados a ele: o transporte do paciente de seu leito ou dos equipamentos de suporte à vida é muito arriscada e a natureza estática das imagens da tomografia por raios-X não traz a informação dinâmica das condições dos pulmões. Algumas vezes, quando o médico decide que tal procedimento é necessário, já é tarde demais para reverter os danos nos pulmões. Cheney, Isaacson e Newell(1) comentam que o procedimento com raios-X é dividido em duas partes: primeiro é feita uma inalação de gases radioativos para detectar a região ventilada dos pulmões através dos raios-X; em seguida é feita a injeção de um contraste, radioativo ou não, no sangue para detectar as regiões irrigadas de sangue dos pulmões. Estas duas imagens são comparadas para determinar as regiões irrigadas mas sem ventilação e vice-versa. Considerando isto, a TIE pode ser uma ferramenta atrativa pois é de fácil utilização em leitos de UTI e não tem a necessidade de introdução de substâncias potencialmente nocivas ao organismo.

Para que a TIE possa auxiliar o médico a ajustar os parâmetros dos equipamentos, ela deve ser capaz de fornecer imagens rapidamente e de qualidade. Deve ainda ser capaz de detectar a tempo a ocorrência das anormalidades a que os pulmões podem sofrer, desde colapso dos alvéolos até a ocorrência de pneumotórax. Isto é feito com a teoria de identificação de sistemas e ajuste de parâmetros.

2.2 Identificação e ajuste de parâmetros

Uma mudança que ocorreu em meados da metade do século passado foi a necessidade de modelar matematicamente sistemas dinâmicos ou estáticos a partir de medições de grandezas relacionados a este sistema e não somente segundo a física presente no sistema. Pode-se dizer que o principal motivo para isso foi o aumento da complexidade dos sistemas que impossibilita a determinação de equações que descrevam o sistema com a precisão necessária, processo denominado *modelagem fenomenológica*. Além disto, os avanços tecnológicos e o barateamento dos computadores possibilitou o tratamento de grandes quantidades de dados que podem ser extraídos dos sistemas, sendo usados para determinar um modelo e ajustar seus parâmetros de forma que possa explicar os dados, processo denominado *identificação de sistemas* e ajuste de parâmetros (8).

Neste trabalho adota-se o termo *ajuste de parâmetros* como descrito por Fleury e Lima(9): O processo de ajustar um conjunto de parâmetros de um modelo adotado para o sistema, seja dinâmico ou estático, através da observação das grandezas mensuráveis de entrada e saída do sistema.

No caso da TIE, há uma mistura entre estes dois tipos de modelagens. Como o problema a ser resolvido é de natureza eletromagnética, é natural partir das equações de Maxwell para encontrar um modelo que explique satisfatoriamente bem o sistema. Estando com as equações em mãos, podem ser feitas hipóteses e particularizações cabíveis ao problema. Esta é a parte que usa a modelagem fenomenológica. A partir daí, um conjunto de parâmetros do modelo devem ser determinados para ajuste do modelo. Nesta parte faz-se uso do ajuste de parâmetros.

Em geral, pode-se citar algumas dificuldades do processo de identificação de sistemas e ajuste de parâmetros:

1. Não unicidade de solução, ou seja, a partir de um conjunto de dados de entrada e saída muitas vezes é possível encontrar mais de um conjunto de parâmetros válidos.

2. Os erros de medição das grandezas podem influenciar muito os resultados da identificação de sistemas caso não sejam tomadas precauções para remover tais erros ou não sejam levados em conta no modelo.
3. O problema de identificação de sistemas é do tipo inverso, que apresenta problemas numéricos como a precisão numérica finita dos computadores digitais e discretização do modelo.
4. A não linearidade dos sistemas reais pode causar problemas de convergência.
5. Nem sempre é possível obter a quantidade suficiente de informação sobre as entradas e as saídas para o ajuste do modelo. Nesses casos são utilizadas regularizações para tentar contornar o problema.
6. Quantificar a qualidade do ajuste dos parâmetros e da modelagem é um tanto subjetiva. Nem sempre um resultado que atende a um critério de desempenho tem utilidade prática.

A TIE é um método de identificação de sistemas que é composto de um *hardware* e um *software*, que são capazes de:

1. Impor entradas controladas no sistema que se quer observar;
2. Ler as respostas deste sistema às entradas impostas;
3. Com os dois conjuntos de dados, ajustar os parâmetros do modelo assumido;
4. Gerar uma estimativa da distribuição da propriedade do sistema que é de interesse ao usuário.

As duas primeiras são tratadas com a teoria de aquisição e condicionamento de sinais, as duas últimas são tratadas com a teoria de resolução de problemas inversos.

2.2.1 Problema direto e inverso

Pode-se fazer uma divisão em duas classe dos problemas tratados na engenharia. O primeiro é chamado *problema direto* e o segundo *problema inverso*.

O problema direto é caracterizado pela necessidade de se conhecer as saídas de um sistema cujo modelo para o sistema e as entradas do sistema são conhecidos. Este tipo de problema costuma ocorrer nas etapas de projeto, onde se tem modelos idealizados para o sistema e as entradas e procura-se determinar os efeitos. A Fig. (2.1) mostra o diagrama típico de um problema direto.

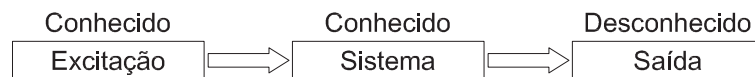


Figura 2.1: Diagrama típico de um problema direto.

O problema inverso é caracterizado pela necessidade de se conhecer um modelo e/ou os parâmetros de um modelo para o sistema de forma que as entradas conhecidas causem as saídas também conhecidas. Este tipo de problema costuma ocorrer nos problemas de identificação, onde estão disponíveis medidas das entradas e saídas do sistema e quer-se encontrar um modelo compatível. Nota-se a relação direta entre problema inverso e identificação de sistemas. A Fig. (2.2) mostra o diagrama típico de um problema inverso.

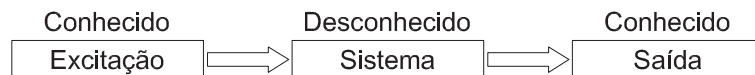


Figura 2.2: Diagrama típico de um problema inverso.

A resolução de problemas inversos também está presente nas seguintes áreas (10):

- controle ótimo em sistemas estocásticos;
- álgebra linear computacional em problemas de posto incompleto;
- teoria de filtragem;
- assimilação/iniciação de dados;
- teoria da estimação.

Nesta classificação, a TIE encontra-se na classe de problemas inversos. Adicionalmente, é um problema não linear e a convergência do processo de estimação de imagens³ deve ser investigada (11). Em geral, a solução de um problema inverso engloba a solução do problema direto associado a ele.

Para a solução de problemas inversos, Velho(10) discute uma pequena lista:

1. inversão direta;
2. decomposição em valores singulares;
3. mínimos quadrados e variantes (mínimos quadrados ponderados);
4. métodos de regularização;
5. métodos variacionais;
6. métodos bayesianos;
7. filtros digitais;
8. redes neurais.

O processo de identificação de sistemas e ajuste de parâmetros enfrenta algumas dificuldades, a principal fonte de dificuldades é a natureza mal-posta destes problemas.

³O termo *estimação de imagem* tem o mesmo significado de estimação do estado

2.2.2 Problema mal-posto

No início do século XX, o matemático francês Jacques Hadamard definiu um problema bem-posto como aquele que cumpre as três condições:

1. Existe solução⁴;
2. A solução é única;
3. A solução tem uma dependência contínua (suave) com os dados de entrada.

Assim, o problema é dito mal-posto se alguma das condições acima não é satisfeita. Em geral, nenhuma das condições de Hadamard é satisfeita num problema inverso Velho(10).

Problemas discretizados são chamados mal condicionados se a condição 3 não se cumpre. Um sistema mal condicionado é caracterizado por instabilidade numérica, que no caso da TIE é causada por diversos fatores. As limitações citadas na seção 2.4 estão associadas também ao mal condicionamento do problema:

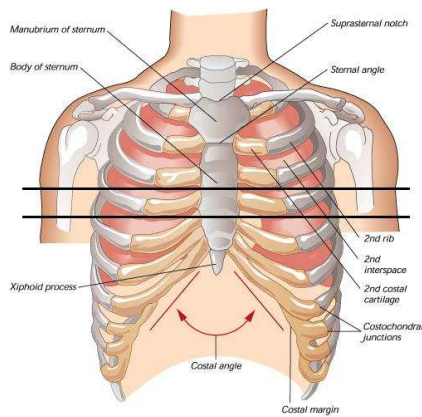
1. A discretização do domínio em um número finito de elementos via malha de elementos finitos causa problemas de estabilidade e rastreamento devido à limitação do número de parâmetros a serem ajustados de modo a conseguir relacionar corretamente as entradas de saídas do sistema (3). Isto desrespeita a primeira e a terceira condições de Hadamard.
2. Não é conhecida a distribuição de tensões ao longo de todo $\partial\Gamma$, então as informações de Cauchy para a solução das equações diferenciais não são totalmente conhecidas e por isso não há solução unívoca para o problema. Isto desrespeita a segunda condição de Hadamard.

⁴Esta condição deve se entender como a capacidade de determinar uma solução para um problema. É necessário definir bem qual o problema a ser resolvido. Caso o problema seja *determinar a distribuição discretizada de resistividade no meio de modo a compatibilizar exatamente os dados de entrada e saída do sistema*, então este problema provavelmente não apresenta solução. Porém se o problema for *determinar uma distribuição de resistividade discretizada de forma a minimizar a discrepância entre os dados de entrada e saída*, então o problema apresenta solução.

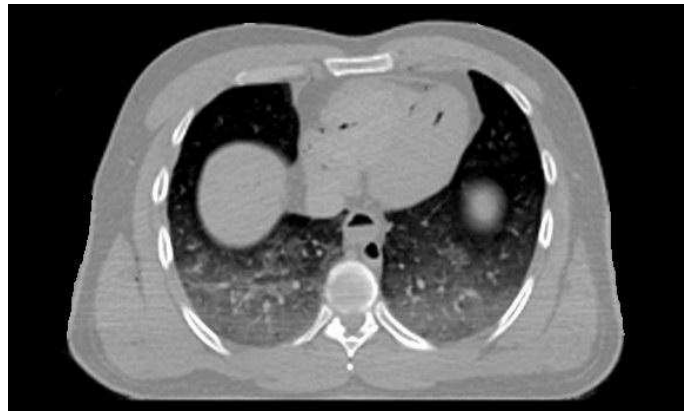
3. A limitada quantidade de informação sobre as entradas e saídas pode caracterizar problemas de observabilidade, ou identificabilidade dos parâmetros. Isto desrespeita a terceira condição de Hadamard.

2.3 O estado observado na TIE

Neste trabalho utiliza-se do conceito de *estado* de um sistema. O *estado* de um sistema dinâmico qualquer é um conjunto escolhido de grandezas físicas (variáveis de estado), mensuráveis ou não que, juntamente com o conhecimento da dinâmica do sistema e sem a presença de excitação externa, determinam completamente a evolução do sistema. Pode-se inclusive considerar os parâmetros de um modelo não variável como variáveis de estado, considerando que a dinâmica deste "sistema" é nula. No caso deste trabalho, o estado é considerado como sendo a distribuição de resistividade elétrica dos tecidos do corpo humano e dos gases presentes nos pulmões.



(a) Cortes transversais.



(b) Faixa de interesse.

Figura 2.3: Domínio de interesse. (adaptado de (12))

A TIE estima o estado no interior de uma região de interesse do corpo humano, doravante chamado de domínio Γ e limitado por uma superfície de contorno externo $\partial\Gamma$. No caso de observação das condições pulmonares, Γ é o volume finito e limitado por dois cortes transversais e paralelos do tórax na altura média dos pulmões e a superfície

de contorno $\partial\Gamma$ é apenas a superfície da pele que envolve faixa, como pode ser visto na Fig. (2.3).

Como em todo processo de estimação de parâmetros de um modelo, é necessário o conhecimento de sinais de entrada e de saída do sistema. Segundo Trigo(4), são possíveis dois métodos para a coleta de dados para o uso na estimação do estado: o primeiro é feito impondo uma distribuição espacial de corrente (alternada) em $\partial\Gamma$ e medindo a distribuição de tensão que surge em $\partial\Gamma$; o segundo é feito impondo uma distribuição de tensão (alternada) em $\partial\Gamma$ e medindo a distribuição de corrente que surge em $\partial\Gamma$.

A distribuição de tensão e de corrente relacionam-se através de uma função não linear da distribuição de impedância complexa no interior do domínio e da geometria do mesmo, assim trazem informações sobre o estado do domínio que podem ser usados para a estimação. A impedância elétrica Z_r de um elemento é definida como a razão entre o fasor da tensão V_r através de um elemento pelo fasor da corrente I_r que passa através deste elemento,

$$Z_r = \frac{V_r}{I_r}. \quad (2.1)$$

A parte real da impedância é chamada de resistência, enquanto que a parte complexa é chamada de reatância. A resistividade ρ de um material pode ser definida como a resistência do material por unidade de comprimento do material e por unidade de área da seção transversal do material e sua unidade no Sistema Internacional de Unidades (SI) é $[\Omega.m]$. Analogamente, a reatividade ρ do material pode ser definida como a reatância do material por unidade de comprimento do material e por unidade de área da seção transversal do material.

Segundo Barber e Brown(13), se as correntes injetadas tiverem frequência entre 20 e 50 kHz, a componente complexa pode ser desprezada. Este é o caso utilizado na TIE, portanto só são considerados os efeitos resistivos do meio. Segundo Nopp et al.(14), a resistividade e permitividade relativa⁵ do meio são dependentes da frequência. Os

⁵Permitividade relativa é definida como a razão entre a permitividade do meio em relação a do vácuo.

resultados obtidos quando injeta-se corrente com frequências inferiores a 20 kHz são falsificados por efeitos de polarização dos eletrodos, enquanto que para frequências maiores que 50 kHz a influencia da impedância dos eletrodos pode ser desprezada.

Sob o ponto de vista clínico a TIE é eficaz pois a dinâmica dos fluidos no interior do corpo humano afeta a distribuição de resistividade elétrica. Nopp et al.(14) mostram que o pulmão aerado apresenta uma grande diferença na resistividade elétrica com relação ao pulmão colabado devido a presença de ar, que possui alta resistividade, contrastando com os tecidos do corpo humano, que possuem resistividades similares ao da água. Mostram ainda que a resistividade aumenta enquanto que a permitividade relativa diminui com o aumento da quantidade de ar dentro dos pulmões, sendo que a variação da permitividade é muito mais acentuada que a variação da resistividade. Além disto, mostram que muitas patologias pulmonares alteram a resistividade dos pulmões, como os diversos tipos de pneumonia e enfisemas e concluem que seria possível utilizar as propriedades elétricas dos pulmões como meio de auxiliar o diagnóstico médico.

2.4 Limitações e vantagens da TIE

Com a distribuição espacial e temporal de resistividade obtida pela TIE é possível montar uma sequência de imagens⁶ para o usuário que podem ser relacionadas com o fenômeno de interesse. Apesar da resolução espacial das imagens da TIE serem inferiores quando comparadas às imagens geradas por outros métodos, tais como a ressonância magnética, tomografia computadorizada e ultra-sonografia, a TIE apresenta algumas vantagens:

1. É inofensiva pois não é invasiva, não utiliza nenhum tipo de radiação e a corrente elétrica é inofensiva desde que obedeça os limites de segurança (15);
2. Baixo custo devido a um *Hardware* relativamente simples;
3. Portabilidade devida às pequenas dimensões do equipamento, o que torna possível levar o equipamento até o paciente em vez do contrário;
4. Apresenta resposta temporal rápida, o que permite obter imagens praticamente em tempo real.

Atualmente, os diversos grupos de pesquisa estudam modos de aumentar a resolução espacial, acuidade e rapidez com que a TIE gera imagens. Existem algumas restrições na TIE que causam diminuição na resolução espacial:

1. Não se pode dizer que toda a corrente injetada em $\partial\Gamma$ permanece dentro de Γ . É praticamente inevitável que ocorra alguma fuga de corrente para as outras regiões do corpo do paciente. Com isto a densidade de corrente dentro de Γ diminui, diminuindo a relação sinal/ruído, que causa aumento dos efeitos do ruído sobre a medida. Conseqüentemente, há uma diminuição da qualidade das medidas usadas para estimar o estado. Outro problema que a fuga de corrente causa é que a resistividade das regiões ao redor de Γ interferem nas medidas de tensão (16).

⁶Neste trabalho, o termo *imagem* tem o mesmo significado de estado do sistema em um determinado instante.

2. Teoricamente falando, Sylvester e Uhlmann(17) mostram que todas as possíveis medidas em $\partial\Gamma$ determinam univocamente a resistividade em Γ . Entretanto, atualmente não é possível medir a distribuição de tensão e corrente ao longo de todo $\partial\Gamma$, então apenas algumas regiões em $\partial\Gamma$ têm estas grandezas medidas através de eletrodos. Com a discretização das leituras de tensões e correntes, o número de medidas linearmente independentes é finito, causando limite na quantidade de informação conhecida sobre o sistema e, por consequência, diminuição do número de variáveis de estado que se pode estimar sem que se use informação a priori⁷. Por este motivo a resolução das imagens está diretamente ligada ao número e posição dos eletrodos ao longo de $\partial\Gamma$.

3. Os métodos atuais mais utilizados na TIE (e que também é utilizado neste trabalho) fazem uso do métodos dos elementos finitos (MEF) para discretizar Γ . Com esta discretização, o número de variáveis de estado torna-se um número finito (resistividade de cada um dos elementos da malha) ao invés de infinitos no caso contínuo (distribuição contínua de resistividade em Γ). Toda a região compreendida por um elemento da malha de elementos finitos é considerada possuir a mesma resistividade elétrica. Com isto, o estado obtido pela resolução das equações pertinentes é apenas uma *estimativa* do estado real presente em Γ . Este estado aproximado representa o valor médio da resistividade presente em cada elementos, o que equivale a um filtro passa-baixas⁸ espacial na imagem obtida.

⁷Neste caso, *informação a priori* é toda informação que se conhece sobre a distribuição de resistividade no domínio Γ , seja esta informação um valor fixo ou um intervalo possível de resistividade. Além disto, a informação pode estar na forma de definições de sub-regiões onde a resistividade é assumida ser constante (ou aproximadamente constante), na forma de regularizações ou ainda na forma de informações estatísticas, tais como matrizes de covariância do estado.

⁸Filtro passa-baixas é um filtro de sinais que penaliza variações de altas frequências. Note que isto funciona como um tipo de informação a priori.

2.5 Padrão de corrente e de tensão

O número de medidas independentes possíveis na TIE está relacionada não só ao número de eletrodos em $\partial\Gamma$, mas também ao modo como correntes são injetadas e tensões são medidas (ou vice-versa). Utiliza-se o termo *padrão de corrente* para exprimir o modo como as correntes elétricas são impostas ou medidas e o termo *padrão de tensão* para exprimir o modo como as tensões são impostas ou medidas. Diversos autores estudaram meios de injetar corrente e medir tensões, Trigo(4) comenta quatro métodos, três deles permitem obter $e.(e-3)/2$ medidas de tensões independentes, onde e é o número de eletrodos e um deles permite obter $e.(e-1)/2$ medidas independentes de tensões. Aqui será explicado somente o padrão de corrente e de tensão utilizado no trabalho:

A injeção de corrente é baseada no método dos padrões vizinhos proposto por Brown e Segar(18) apud Trigo(4). Neste caso, aplica-se corrente entre dois eletrodos separados por um eletrodo, por exemplo o par (1,3) conforme Fig. (2.4). Mantendo esta corrente, mede-se as tensões entre pares de eletrodos pulando também um eletrodo, desde o par (1,3) até o par $(e,2)$. Então o par de injeção é alterado em uma unidade e as tensões são novamente medidas.

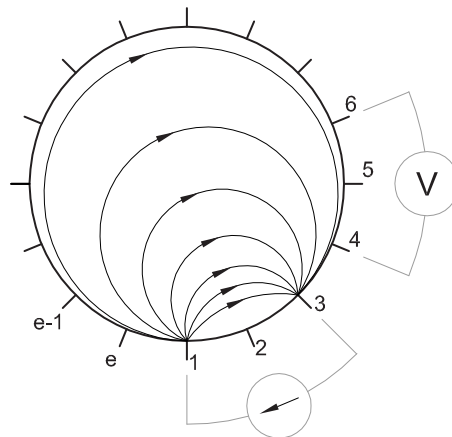


Figura 2.4: Método dos padrões vizinhos

Deste modo são obtidos e^2 medidas de tensão, sendo que apenas $e^2/2$ são independentes devido ao princípio da reciprocidade, que afirma que medidas de tensões em pares de eletrodos que já haviam sido utilizados para injeção de corrente conduzem a resultados idênticos (19). Este é o valor máximo que este método consegue fornecer de medidas linearmente independentes, no caso do comentado por Trigo(4), o número de medidas é menor devido a dificuldade de se medir as três tensões que envolvem os eletrodos que injetam corrente devido à impedância de contato meio-eletrodos. Como as tensões são medidas entre 2 eletrodos e não entre um eletrodo e uma referência fixa, diz-se que mede-se tensões diferenciais. Este tipo de medida traz a vantagem de reduzir os efeitos de ruído nas medidas realizadas.

Salienta-se três aspectos sobre a injeção de corrente e tensão:

1. ter um certo número de medidas de tensão independentes não é garantia de que será possível estimar o mesmo número ou até mesmo um número menor de variáveis de estado do modelo adotado. Para garantir isto é necessário verificar se estas medidas são suficientes para assegurar a observabilidade do sistema.
2. um subconjunto de medidas reais não independentes traz informação útil para o sistema. Caso não houvesse incertezas e ruídos nas medidas feitas, haveria informação redundante, mas como isto nunca ocorre na prática, este excesso de informação pode ser utilizada de modo a ajudar a diminuir o efeito do ruído das medidas, por exemplo através do método dos mínimos quadrados⁹.
3. a densidade de corrente que passa por Γ não é uniforme. Isto pode ser entendido pela Fig. (2.4): a região mais próxima do par de injeção de corrente possui uma densidade de corrente maior em comparação com as regiões ao longe, isto causa insensibilidade das medidas em relação às variações de resistividade nas regiões ao longe do par de injeção. Considerando a contribuição de todos os padrões de corrente, conclui-se que a região central de Γ é penalizada neste sentido pois é a região mais afastada de todos

⁹ Este assunto será tratado na seção 6.2.

os eletrodos. De fato, Yorkey, Webster e Tompkins(11) examinaram os auto-valores da matriz jacobiana responsável pelo operador linearizado que relaciona o mapa de resistividade com os potenciais elétricos medidos no algoritmo de Newton-Raphson e concluíram que os auto-valores, correspondentes às regiões centrais do domínio, possuem os menores valores significando insensibilidade do método para detectar mudanças nestas regiões. A insensibilidade em relação às variações que ocorrem no centro de Γ podem ser contornadas através de regularizações, como feito por Aya et al.(20) para resolver o problema inverso.

2.6 Estimação de imagens

Após a coleta das medidas de tensões e correntes, a próxima etapa do processo é a estimação das imagens.

Muitos métodos para a estimação foram desenvolvidos. Uma listagem dos métodos estudados pode ser encontrado em (1). Estes métodos podem ser classificados de diversas maneiras, entre elas pode-se citar:

estática / dinâmica: Esta classificação separa as reconstruções conforme a velocidade de mudança do estado em relação ao tempo necessário para realizar a aquisição de sinais e processamento. Em situações em que as mudanças de resistividade são suficientemente lentas, todas as medidas podem ser realizadas antes que haja uma mudança significativa na distribuição de resistividade, então um método estático pode ser utilizado. Exemplos de aplicações onde se pode utilizar de métodos estáticos é na determinação de jazidas minerais no solo e detecção de defeitos de fabricação em componentes mecânicos. Já nos casos onde as mudanças de resistividade são mais rápidas, os efeitos da dinâmica do sistema devem ser levados em conta e um método dinâmico deve ser utilizado. Pode-se citar como exemplos o monitoramento de escoamento multifásico em tubulações e monitoramentos das condições cardíaco-pulmonares. Kaipio, Karjalainen e Somersalo(3) comentam que

durante atividades físicas, a frequência cardíaca é de aproximadamente de 200 batidas por minuto, então considerações estáticas neste caso levam a erros de estimação.

seqüencial / por lote: Esta classificação é feita conforme o número de medidas utilizada para reconstruir as imagens. Quando um pequeno número de novas medidas juntamente com medidas obtidas anteriormente são utilizadas para estimar as imagens, o processo é chamado de seqüencial. Com exemplo pode-se citar os filtros de Kalman. Quando um lote completo de medidas é utilizado para reconstruir a imagem sem que medidas anteriores seja utilizadas, o processo é por lotes. Como exemplo pode-se citar os métodos por sensibilidade, por perturbações e por linhas equipotenciais.

Teoricamente, os métodos devem ser tratados como seqüenciais pois não é possível medir todos os padrões de corrente e tensão instantaneamente, porém com o aumento da velocidade dos computadores e das placas de aquisição de sinais, pode-se considerar que é possível medir um conjunto de tensões quase instantaneamente, de forma que esta hipótese pode ser usada satisfatoriamente. Nos trabalho de Kaipio, Karjalainen e Somersalo(3), Vauhkonen, Karjalainen e Kaipio(2) e Trigo(4) considerou-se que todas a medidas de tensões de um mesmo padrão de corrente eram simultâneas, porém os potenciais elétricos medidos por cada um dos padrões de corrente não eram simultâneos.

relativo / absoluto: Esta classificação é feita considerando o tipo de imagem reconstruída. Se as imagens reconstruídas forem de variação de resistividade, o método é considerado relativo. Como exemplo cita-se o método de sensibilidade, de perturbação e de linhas equipotenciais. Caso as imagens forem de valores absolutos, o método é classificado como absoluto. Como exemplo cita-se o método por otimização topológica, Gauss-Newton e os filtros de Kalman.

Nos métodos relativos, uma certa distribuição de resistividade deve ser usada como

referência para as imagens. Por isto, esta imagem de referência deve ser escolhida de modo a propiciar imagens com significado físico útil para o usuário. Além disto, a maioria dos métodos relativos são linearizações do problema original, utilizando esta imagem de referência como ponto de linearização. Com isto, a importância da imagem de referência torna-se mais crítica pois esta deve propiciar um estado base para a linearização do problema que conduza a imagens de qualidade suficiente. Conforme o estado verdadeiro se distancia do estado de referência, as imagens tornam-se cada vez mais incorretas devido aos efeitos de não linearidade não considerados.

3 FILTRO DE KALMAN NA TIE

A TIE depende de medidas de tensões e correntes feitas através de eletrodos aderidos em $\partial\Gamma$, cujo contato elétrico não é perfeito e sempre haverá uma impedância de contato. Além disto, é necessário coletar rapidamente as medidas de forma a ser capaz de gerar imagens em tempo real. Todos estes efeitos combinados causam problemas para a estimação do estado pois as medidas obtidas pelo sistema de aquisição possuirão ruídos e incertezas. Somando-se a isto, um modelo aproximado é adotado, o que causa incertezas também no que seria uma "boa" imagem.

Os ruídos e incertezas têm natureza estocástica (ou então podem ser modelados como tal), o que leva à adoção de métodos estocásticos para a estimação do estado. Dentro do conjunto de ferramentas matemáticas utilizadas para estimação estocástica, a ferramenta mais bem conhecida e usada é o chamado filtro de Kalman. Desenvolvido a partir de 1960, o filtro de Kalman é um estimador preditor-corretor que é ótimo no sentido de minimizar a covariância do erro de estimação. É um algoritmo recursivo, cujo processamento é realizado conforme novo dados a respeito do sistema são obtidos. Mesmo nos casos em que as condições de otimalidade não são satisfeitas, o filtro de Kalman costuma funcionar bem (21). De fato, segundo Kaipio, Karjalainen e Somersalo(3), se os ruídos associados às medidas e ao modelo forem gaussianos, o filtro de Kalman exibe propriedades de otimalidade quadráticas e, caso não sejam, o filtro apresenta a melhor estimativa linear.

O primeiro artigo publicado que resolve o problema da TIE considerando variações temporais de resistividade é atribuído a Vauhkonen, Karjalainen e Kaipio(2). Neste trabalho, os autores utilizam o filtro (linearizado) de Kalman (FK) e comentam que para utilizar abordagens estáticas ao tentar resolver problemas dinâmicos é necessário utilizar poucas medidas (que diminui a resolução espacial da imagem) e/ou janelas de medição de tensão menores (que aumenta o nível de ruído nas medidas). Além disto, abordagens clássicas não levam em conta a dependência estatística entre imagens em instantes diferentes, ou seja, não são levados em conta os estados anteriores para a nova estimação. Como a tendência de evolução do estado pode ser utilizada para ajudar na nova estimação como uma forma de informação a priori, não é apropriado utilizar métodos que não levam em conta esta evolução pois assim perde-se informação de qualidade. Neste trabalho, o problema de estimação é tratado como um problema de estimação de estado e o FK é usado. Os autores utilizam o conceito de região de interesse (RI) para diminuir o número de variáveis de estado e melhorar a estabilidade numérica do filtro. Apesar disto surge o problema de capacidade de rastrear o estado corretamente devido à grande dimensão espacial das RIs.

Os filtros de Kalman sofrem um atraso nas estimativas que são provenientes da natureza causal do filtro, isto é, o filtro somente utiliza informações do passado para estimar o novo estado. Segundo Kaipio, Karjalainen e Somersalo(3), as aplicações em que o estado não é usado para controle em tempo real, os cálculos podem ser feitas *off-line*, e então pode-se utilizar todas as medidas para estimar o estado em cada instante de tempo. Neste trabalho os autores utilizam regularização espacial de Tikhonov para diminuir a instabilidade numérica do filtro, porém tal regularização tem um efeito de alisamento das imagens obtidas. Segundo Trigo, Lima e Amato(7), o uso da regularização de Tikhonov não é adequada em aplicações médicas pois a acurácia do valor de resistividade em regiões específicas é necessária

A acuidade das estimativas do FK pode ser prejudicada caso a escolha do estado de referência para a linearização seja muito diferente do estado real. Para tentar contornar

este problema, Kim et al.(5) utilizaram pela primeira vez o filtro estendido de Kalman (FEK), que faz a linearização sempre em torno da última estimativa. O preço que se paga por isto é um maior tempo computacional devido ao cálculo da matriz jacobiana a cada iteração. Neste trabalho, mostram a superioridade do FEK sobre o FK principalmente na definição das imagens, porém ainda assim foi necessário utilizar regularização espacial de Tikhonov para melhorar o condicionamento do sistema.

Kim et al.(22) trabalham no caso onde a resistividade de uma certa sub-região interna é conhecida, por exemplo a região da coluna vertebral. Com este acréscimo de informação, mostrou-se um modo de adicionar informação a priori sobre a estrutura de $\mathbf{\Gamma}$ aos filtros de Kalman.

Trigo, Lima e Amato(7) e Trigo(4), utilizando o FEK, desenvolvem métodos para estimar a distribuição de resistividade em $\mathbf{\Gamma}$ e também o valor da resistência de contato de cada um dos eletrodos, método foi denominado *duas fases*. O método consiste em estimar alternadamente a resistência de contato e a resistividade de $\mathbf{\Gamma}$ e é baseada no teorema do ponto fixo (23).

PARTE II

BASE TEÓRICA

4 MODELOS ADOTADOS

4.1 Modelo do domínio

O modelo adotado para o domínio Γ considera que este é uma região bidimensional, fechada e limitada por uma superfície de contorno $\partial\Gamma$. Considera-se que ele possui uma distribuição estacionária de carga, uma distribuição de condutividade $\sigma(x,y)$ e permitividade ϵ constante.

As equações de Maxwell do eletromagnetismo para materiais lineares, isotrópicos e não dispersivos são:

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = q \qquad \oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_V q dV \qquad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \qquad (4.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \qquad (4.3)$$

$$\nabla \times \mu^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \oint_C \mu^{-1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \int_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}, \qquad (4.4)$$

onde a eq. (4.1) é a lei de Gauss, eq. (4.2) é a lei de Gauss para o magnetismo, eq. (4.3) é a lei de Faraday e eq. (4.4) é a lei de Ampère, toda nas formas diferenciais e integrais. $\mathbf{E}$ é o campo elétrico, q é a densidade de carga livre, $\mathbf{B}$ é a densidade de fluxo magnético, $\mathbf{J}$ é a densidade de corrente livre, μ é a permeabilidade magnética do material e ϵ é a permitividade elétrica do material.

Parte-se da terceira equação de Maxwell (eq. (4.3)) na forma diferencial:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4.5)$$

Segundo Hua et al.(24), se a frequência da corrente que atravessa o meio for inferior a 30MHz, pode-se considerar que o termo da direita da eq. (4.5) é nula, restando então

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (4.6)$$

e na sua forma integral:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (4.7)$$

Devido a esta última, existe uma função potencial elétrico escalar $\Psi(x, y)$ tal que

$$-\nabla \Psi = \mathbf{E}. \quad (4.8)$$

Usando o operador divergência ($\nabla \cdot$) em ambos os lados da quarta equação de Maxwell (eq. (4.4)) na forma diferencial, obtém-se

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mu^{-1} \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t}. \quad (4.9)$$

Note que foi usada a hipótese de que ϵ é constante em todo $\mathbf{\Gamma}$. Sabe-se que $\nabla \cdot (\nabla \times \mu \mathbf{B}) = 0$ então, usando a primeira equação de Maxwell (eq. (4.1)) na sua forma diferencial, chega-se a

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial q}{\partial t}. \quad (4.10)$$

Assumindo que não haja acúmulo de carga dentro de $\mathbf{\Gamma}$, o termo da direita da eq. (4.10) é nulo, então

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (4.11)$$

A densidade de corrente no interior do meio com propriedades resistivas e capacitivas no caso em que a frequência é fixa é dada por

$$\mathbf{J} = [\sigma(x, y) + i\omega\epsilon]\mathbf{E}, \quad (4.12)$$

onde i é a unidade imaginária e ω é a frequência angular da corrente injetada. Segundo Barber e Brown(13), se as correntes injetadas tiverem frequência entre 20 e 50 kHz, a componente complexa pode ser desprezada, restando

$$\mathbf{J} = \sigma(x, y)\mathbf{E}. \quad (4.13)$$

Usando a eq. (4.13) e eq. (4.8) na eq. (4.11), obtém-se a equação

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Psi) = 0, \quad (4.14)$$

que descreve a distribuição de tensão dentro de Γ .

Como não deve ocorrer acúmulo ou perda da carga elétrica livre dentro de Γ , pode-se escrever a seguinte expressão para a densidade de corrente que atravessa $\partial\Gamma$:

$$\oint_{\partial\Gamma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (4.15)$$

Na prática, as tensões e correntes medidas e injetadas são feitas através de e eletrodos localizados em $\partial\Gamma$, então a condição de contorno para a corrente é:

$$\begin{aligned} \sigma \frac{\partial \Psi(\sigma)}{\partial \hat{\mathbf{n}}} &= J_i, & i = 1, 2, \dots, e \\ \sigma \frac{\partial \Psi(\sigma)}{\partial \hat{\mathbf{n}}} &= 0, & \text{nos demais pontos de } \partial\Gamma, \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o versor normal à $\partial\Gamma$ orientado para fora e J_i é a densidade de corrente do i -ésimo eletrodo.

Neste trabalho, escolheu-se utilizar a grandeza escalar *resistividade* que é relacionada com a condutividade por $\rho = \sigma^{-1}$.

4.2 Modelo do eletrodo

Neste trabalho, o modelo de eletrodo segue o trabalho de Cheng et al.(25). Este modelo, chamado de *modelo completo*, supõe um eletrodo com área de contato finita, cobrindo uma área apreciável do domínio. Segundo Hua et al.(24), eletrodos com área de contato grande permitem uma distribuição de corrente elétrica mais uniforme em Γ e possui menor impedância de contato pois esta última é inversamente proporcional à área de contato. Isto aumenta a sensibilidade das medidas em relação às variações de resistividade internas. Este modelo supõe também uma impedância de contato entre o eletrodo e a superfície de $\partial\Gamma$. Nos casos de aplicação médica, esta impedância é elevada, e em geral é variável no tempo. Por último, este modelo admite que não há diferença de potencial elétrico dentro do eletrodo. As equações finais do modelo são:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla \Psi \right) = 0 \quad (4.17)$$

$$\int_{\partial\Gamma_i} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{n}} = I_i \quad (4.18)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{n}} = 0 \quad (4.19)$$

$$\Psi + z_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{n}} = v_i \quad (4.20)$$

A eq. (4.18) representa a corrente que atravessa o i -ésimo eletrodo $i = 1, 2, \dots, e$, com I_i sendo a corrente elétrica que o atravessa e $\partial\Gamma_i$ representa a área de $\partial\Gamma$ coberta pelo eletrodo. A eq. (4.19) representa a inexistência de corrente elétrica atravessando $\partial\Gamma$ na regiões sem eletrodos. A eq. (4.20) representa o potencial elétrico v_i nos eletrodos como sendo a soma do potencial Ψ mais a queda de tensão na interface do eletrodo devido a resistência de contato representada por $z_i = \frac{1}{\rho t} [\Omega^{-1}m^{-2}]$, onde t é a espessura da interface.

4.3 Discretização do domínio

O domínio Γ é discretizado em elementos finitos para a solução numérica. O domínio é dividido em uma malha com m nós e n elementos finitos triangulares de resistividade ρ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ constante, de altura constante e igual para todos os elementos.

Ao longo de todo o domínio, a função que descreve o potencial elétrico é dada pela composição do potencial elétrico em cada elemento,

$$V(x, y) \simeq \sum_{i=1}^n w_i v_i(x, y), \quad (4.21)$$

onde w_i vale 1 quando (x, y) estiver contido no i -ésimo elemento e vale 0 caso contrário e $v_i(x, y)$ é o potencial elétrico dentro do i -ésimo elemento da malha, sendo aproximado por uma função interpoladora linear do tipo

$$v_i(x, y) = a + bx + cy, \quad (4.22)$$

cujos os coeficientes a , b e c são funções dos potenciais elétricos dos três vértices do elemento triangular (11). Sejam as coordenadas nodais de cada um dos três vértices de um elemento serem denotados por (x_j, y_j) , então a determinação dos coeficientes é feita resolvendo a equação matricial resultante da utilização da eq. (4.22) em cada um destes nós

$$\begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ v_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Resolvendo este sistema, a eq. (4.22) pode ser simplificada para

$$v_i(x, y) = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ v_{i3} \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

onde f_j são as funções de forma, dadas por

$$f_1 = \frac{1}{2\mathbb{A}_i}[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \quad (4.25)$$

$$f_2 = \frac{1}{2\mathbb{A}_i}[(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \quad (4.26)$$

$$f_3 = \frac{1}{2\mathbb{A}_i}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \quad (4.27)$$

e $\mathbb{A}_i$ representa a área do elemento (26). A eq. (4.24) fornece o potencial elétrico em um ponto qualquer dentro do i -ésimo elemento caso os potenciais nos nós sejam conhecidos.

Para associar o potencial elétrico do elemento com sua resistividade, usa-se o princípio variacional correspondente à eq. (4.14) ,

$$\pi_i = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_i} \frac{1}{\rho_i} \|\mathbf{E}\|^2 d\mathbb{V} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_i} \frac{1}{\rho_i} \|\nabla v_i\|^2 d\mathbb{V}, \quad (4.28)$$

onde $\mathbb{V}_i$ é o volume do i -ésimo elemento (27). O gradiente da função potencial elétrico do elemento é dado pela derivação da eq. (4.24)

$$\nabla v_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_i}{\partial x} \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ v_{i3} \end{bmatrix} = \mathbf{F}_i \tilde{\mathbf{v}}_i, \quad (4.29)$$

Utilizando a eq. (4.29) na eq. (4.28), chega-se a

$$\pi_i = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{v}}_i^T \left[\int_{\mathbb{V}_i} \frac{1}{\rho_i} \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbb{V} \right] \tilde{\mathbf{v}}_i. \quad (4.30)$$

O extremo dessa função é encontrado fazendo

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial \tilde{\mathbf{v}}_i} = \left[\int_{\mathbb{V}_i} \frac{1}{\rho_i} \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbb{V} \right] \tilde{\mathbf{v}}_i = \tilde{\mathbf{Y}}_i \tilde{\mathbf{v}}_i, \quad (4.31)$$

onde $\tilde{\mathbf{Y}}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é a matriz de condutividade local do i -ésimo elemento. Realizando a integração adotando uma espessura h uniforme e considerando resistividade homogênea

e isotrópica, chega-se a

$$[\tilde{\mathbf{Y}}_i]_{(k,m)} = \frac{h}{4\mathbb{A}_i\rho_i}(\eta_k\eta_m + \vartheta_k\vartheta_m) \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (y_2 - y_3) \quad , \quad \vartheta_1 = (x_3 - x_2) \\ \eta_2 &= (y_3 - y_1) \quad , \quad \vartheta_2 = (x_1 - x_3) \quad . \\ \eta_3 &= (y_1 - y_2) \quad , \quad \vartheta_3 = (x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (4.33)$$

O princípio variacional aplicado em todo o domínio discretizado corresponde à somatória de todas as matrizes locais dos elementos (4):

$$\mathbf{Y}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{Y}}_i(\rho_i), \quad (4.34)$$

onde $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de resistividade dos elementos

4.4 Discretização dos eletrodos

A discretização dos eletrodos segue o trabalho de Hua et al.(24). Neste trabalho, o modelo completo de eletrodos é discretizado em elementos finitos de duas dimensões. Os detalhes da dedução não serão descritos aqui.

Cada eletrodo é dividido em dois elementos planos com quatro nós adjacentes, conforme Fig. (4.1). Os nós 1, 2 e 3 estão em contato com o domínio, e os nós 4, 5 e 6 estão em contato com o eletrodo.

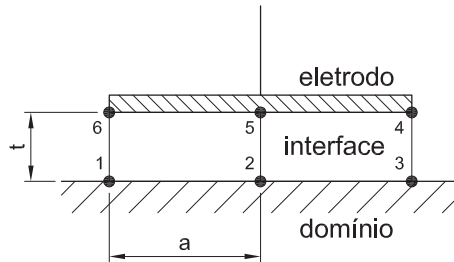


Figura 4.1: Discretização da interface. (adaptado de Hua et al.(24))

Duas hipóteses são usadas pelos autores: as tensões nos nós 4, 5 e 6 são consideradas iguais devido a pequena resistividade elétrica do material do eletrodo e a espessura t da interface tem dimensões muito menores que a largura a do eletrodo ($t \ll a$). Utilizando o mesmo processo usado para determinar a matriz de condutividade local dos elementos do domínio, os autores mostram que a matriz de condutividade de um eletrodo é dada por

$$\tilde{\mathbf{Y}}_i^e = \frac{ab}{3t\rho} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ & 2 & \frac{1}{2} & -3 \\ sim & & 1 & -\frac{3}{2} \\ & & & 6 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

onde b é a dimensão da interface perpendicular a a e t . Pode-se agrupar os termos $t\rho$ como uma única grandeza física que caracteriza a resistência por unidade de área de contato (unidade SI $[\Omega m^2]$), que será nomeada *parâmetro de eletrodo*.

A matriz de condutividade de cada um dos e eletrodos, em coordenadas globais, pode ser adicionada à matriz de condutividade global semelhantemente à eq. (4.34)

$$\mathbf{Y}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{Y}}_i(\rho_i) + \sum_{j=1}^e \tilde{\mathbf{Y}}_j^e(t\rho_j). \quad (4.36)$$

5 PHANTOM NUMÉRICO

Para testar o algoritmo de estimação de imagem, pode-se utilizar um *phantom* numérico, que simula a aquisição do conjunto de dados feito pelo tomógrafo em um domínio Γ arbitrário, cuja distribuição de resistividade ρ^* é escolhida. Como ρ^* é arbitrário, pode-se simular qualquer distribuição de resistividade desejada.

Este método consiste na obtenção de todos os dados necessários para os algoritmos de estimação de imagem, ou seja, consiste na obtenção de todas as tensões medidas pelos e eletrodos em $\partial\Gamma$ para cada um dos p padrões de corrente injetado. Estes dados podem então ser utilizados nos algoritmos de estimação que tentam estimar ρ^* usado no *phantom* numérico.

A determinação das tensões em $\partial\Gamma$ é um problema direto. Para cada padrão de injeção de corrente, o problema direto é resolvido através da eq. (5.1) e são armazenados apenas os valores das tensões dos e eletrodos. Este conjunto de dados então pode ser utilizado nos algoritmos de estimação de imagem e os seus resultados podem ser comparados com ρ^* escolhido no *phantom*. A fim de minimizar o efeito da discretização do domínio, a malha utilizada no *phantom* deve ser refinada, ou seja, deve possuir um grande número de elementos.

5.1 Solução do problema direto

A solução do problema direto consiste em determinar as tensões nodais na malha de elementos finitos a partir do conhecimento da distribuição de resistividade dos n elementos da malha, dos e eletrodos e também do modo como é feita a injeção de corrente¹.

Agrupando as resistividades dos elementos e os parâmetros de eletrodo em um vetor $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^{n+e}$ e a corrente injetada em um vetor $\boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^m$, onde m é o número de nós da malha de elementos finitos, o problema direto é resolvido através da equação

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{I}, \quad (5.1)$$

onde $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de tensões nodais. Como $\boldsymbol{Y}$ é naturalmente singular, uma condição de contorno deve ser imposta para resolver o problema: impõe-se tensão zero em um dos nós para servir como referência para o cálculo das tensões. Para impor esta condição, é necessário zerar a linha e coluna da matriz $\boldsymbol{Y}$ correspondente a este nó e, na intersecção destas, impor 1.0.

¹ Conforme a seção 2.5.

6 FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN

O filtro de Kalman foi desenvolvido com o objetivo de realizar estimações ótimas de mínima variância e de forma recursiva, ou seja, o processamento é realizado conforme novo dados a respeito do sistema são obtidos. Além disto, o filtro de Kalman considera a existência de erros de modelagem da dinâmica do sistema e erros de medição.(26)

O FEK exige a descrição da dinâmica do sistema na forma de espaço de estados, com modelos para as observações e para a evolução do estado. A seguir mostra-se o equacionamento do FEK no caso discreto no tempo e no espaço (28).

6.1 Incógnitas do problema inverso

Neste trabalho, o FEK tenta estimar a distribuição de resistividade discretizada do domínio considerando-se conhecidos os parâmetros dos eletrodos, portanto, daqui em diante, ao se referir ao vetor $\boldsymbol{\rho}$ ou, equivalentemente, ao estado do sistema, estar-se-á considerando apenas a resistividade do domínio.

6.2 Método dos mínimos quadrados ponderados (MMQP)

Seja um sistema discreto cujo estado a ser determinado, representado por $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^n$, está relacionado com um vetor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{ep}$ de medidas mensuráveis do sistema através da seguinte relação linear:

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{v}, \quad (6.1)$$

onde $\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^{ep \times n}$. É necessário que haja um número suficiente de medidas das saídas do sistema $\boldsymbol{v}$ para que o estado $\boldsymbol{\rho}$ seja univocamente determinado. Devido aos erros de medida dos sensores que formam o vetor $\boldsymbol{v}$, deseja-se utilizar um número de medidas superior ao necessário de modo a obter uma redundância de medidas e assim poder utilizar o MMQP para determinar a solução $\boldsymbol{\rho}$ de modo a levar em conta todas as medidas e assim reduzir os efeitos dos erros individuais de cada sensor. O MMQP é mostrado a seguir.

Seja a solução ótima denotada por $\bar{\boldsymbol{\rho}}$, pode-se definir o índice de erro

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{\rho}, \quad (6.2)$$

então a solução desejada deve minimizar este erro, ou então o seguinte índice de erro:

$$IE = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{\rho})^T \boldsymbol{R}^{-1} (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{\rho}), \quad (6.3)$$

onde $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{ep \times ep}$ é uma matriz de pesos para cada uma das ep medidas levando em conta a sua confiabilidade. Com isto, conforme o sensor for mais ruidoso, menos peso este sensor terá na estimativa do estado. No caso do filtro de Kalman, esta matriz representa a covariância do ruído de cada um dos sensores.

Caso $\boldsymbol{R}$ seja positiva definida, a função da eq. (6.3) representa um hiper-parabolóide de concavidade positiva e assim apresenta um mínimo. Para determinar

$\bar{\rho}$ que minimiza o índice de erro, basta derivar a equação em relação a ρ e igualar a zero:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\mathbf{e}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}) = 2(-\mathbf{H})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{v} - \mathbf{H} \rho) = 0. \quad (6.4)$$

Se a matrix $\mathbf{H}$ tiver posto n , tem-se:

$$\bar{\rho} = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{v}. \quad (6.5)$$

Note que este método utiliza um conjunto de medidas $\mathbf{v}$ para estimar o vetor de estado $\bar{\rho}$.

6.3 Filtro estendido de Kalman no caso discreto - discreto

6.3.1 Modelo de evolução do estado e do erro

O modelo de evolução temporal da distribuição de resistividade é dada pela equação de estado discreta no tempo para sistemas lineares.

$$\rho_k = \Phi_{k-1} \rho_{k-1} + \xi_k, \quad (6.6)$$

onde $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de transição de estado no instante $k - 1$ e $\xi_k \in \mathbb{R}^n$ é um vetor de ruído branco, gaussiano e de média nula¹ que representa a incerteza do modelo do sistema. Este ruído, por hipótese, possui matriz de covariância simétrica, positiva semi-definida

$$\mathbf{Q}_k = E[\xi_k \xi_k^T] \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (6.7)$$

¹Ruído branco é aquele em que a função de autocorrelação é o delta de Dirac e possui espectro de frequência constante. Ruído gaussiano é aquele que tem comportamento normal.

O modelo de evolução desenvolvido neste trabalho será tratado no capítulo 7, por hora considera-se conhecida a matriz Φ . A matriz de covariância do erro de estimação é deduzida a partir da teoria de processos Markovianos (29), apresenta-se aqui somente o resultado:

$$\mathbf{P}_k = \Phi_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (6.8)$$

6.3.2 Modelo de observação

A eq. (5.1) permite definir um operador não linear $\mathbf{h}_j : \boldsymbol{\rho} \mapsto \mathbf{v}_j$ para cada $j = 1, 2, \dots, p$ padrão de corrente

$$\mathbf{v}_j(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{h}_j(\boldsymbol{\rho}) = [\mathbf{Y}(\boldsymbol{\rho})]^{-1} \mathbf{I}_j, \quad (6.9)$$

onde $\mathbf{v}_j(\boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{I}_j \in \mathbb{R}^m$. Expandindo este operador em série de Taylor em torno de uma resistividade $\boldsymbol{\rho}_0$ qualquer, tem-se

$$\mathbf{v}_j(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{v}_j(\boldsymbol{\rho}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}_j(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} \right|_{\boldsymbol{\rho}_0} (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0) + \mathcal{O}^2. \quad (6.10)$$

Desprezando os termos de ordem superior e substituindo a eq. (6.9), esta expansão fica

$$\mathbf{v}_j(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{v}_j(\boldsymbol{\rho}_0) + \left. \frac{\partial ([\mathbf{Y}]^{-1} \mathbf{I}_j)}{\partial \boldsymbol{\rho}} \right|_{\boldsymbol{\rho}_0} (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0). \quad (6.11)$$

Usando o resultado da álgebra matricial para a derivada da inversa de uma matriz com respeito a um vetor (30), tem-se

$$\mathbf{v}_j(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{v}_j(\boldsymbol{\rho}_0) + \left(- \left[\mathbf{Y}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \boldsymbol{\rho}} \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{I}_j \right]_{\boldsymbol{\rho}_0} \right) (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0). \quad (6.12)$$

O termo avaliado em $\boldsymbol{\rho}_0$ é a sensibilidade referente ao padrão de corrente j :

$$\tilde{\mathbf{H}}_j(\boldsymbol{\rho}_0) = - \left[\mathbf{Y}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \boldsymbol{\rho}} \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{I}_j \right]_{\boldsymbol{\rho}_0} = - \left[\begin{array}{ccc} [\mathbf{Y}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \rho_1} \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{I}_j] & \dots & [\mathbf{Y}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \rho_n} \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{I}_j] \end{array} \right]_{\boldsymbol{\rho}_0}. \quad (6.13)$$

Como só é possível fazer a medida de tensão nos eletrodos, somente as linhas de $\tilde{\mathbf{H}}_j(\boldsymbol{\rho}_0)$ que representam os nós dos eletrodos precisam ser computados, logo pode-se excluir as linhas de $\tilde{\mathbf{H}}_j$ que não correspondam aos nós de medida de tensão. Desta forma², $\tilde{\mathbf{H}}_j(\boldsymbol{\rho}_0) \in \mathbb{R}^{e \times n}$.

Considerando todos os $j = 1, 2, \dots, p$ padrões de corrente utilizados, pode-se agrupar todas as matrizes de sensibilidade $\tilde{\mathbf{H}}_j(\boldsymbol{\rho}_0)$ em uma só, agrupar todos os vetores de tensões $\mathbf{v}_j$ e escrever a eq. (6.12) da seguinte maneira:

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\rho}_0) + \mathbf{H}(\boldsymbol{\rho}_0)[\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0], \quad (6.14)$$

onde

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{\rho}_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(\boldsymbol{\rho}_0) \\ \mathbf{v}_2(\boldsymbol{\rho}_0) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_p(\boldsymbol{\rho}_0) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}(\boldsymbol{\rho}_0) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_1(\boldsymbol{\rho}_0) \\ \tilde{\mathbf{H}}_2(\boldsymbol{\rho}_0) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{H}}_p(\boldsymbol{\rho}_0) \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

com $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{ep \times n}$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{ep}$.

No FEK discreto no tempo, onde o tempo é dado por $t(k) = kT$, $k = 1, 2, \dots$, o modelo de observação pode levar ainda em conta as incertezas inerentes às medidas dos sensores. A eq. (6.14), se linearizada em torno de um instante $t(k-1)$, fica:

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{\rho}_k) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\rho}_{k-1}) + \mathbf{H}(\boldsymbol{\rho}_{k-1})[\boldsymbol{\rho}_k - \boldsymbol{\rho}_{k-1}] + \boldsymbol{\nu}_k, \quad (6.16)$$

onde $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^{ep}$ é um vetor de ruído branco gaussiano de média nula que afeta as medidas dos sensores. Como hipótese para o FEK, este ruído tem matriz de covariância simétrica e positiva definida $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{ep \times ep}$

$$\mathbf{R}_k = E[\boldsymbol{\nu}_k \boldsymbol{\nu}_k^T]. \quad (6.17)$$

²Utiliza-se o mesmo símbolo de $\tilde{\mathbf{H}}_j$ para representar a matriz de sensibilidade considerando todos os nós e a matriz de sensibilidade considerando apenas os nós relativos aos eletrodos. Apesar disto não haverá confusão pois daqui em diante somente esta última é utilizada.

Definindo-se uma medida nominal

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{v}_k \triangleq \mathbf{v}_k(\boldsymbol{\rho}_k) - \mathbf{v}_k(\boldsymbol{\rho}_{k-1}) + \mathbf{H}_k(\boldsymbol{\rho}_{k-1})\boldsymbol{\rho}_{k-1} \quad (6.18)$$

e usando a equação eq. (6.16), obtém-se o modelo linearizado de observação

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{H}_k(\boldsymbol{\rho}_{k-1})\boldsymbol{\rho}_{k-1} + \boldsymbol{\nu}_k \quad (6.19)$$

6.3.3 Atualização do filtro

Assumindo um conjunto de medidas obtidos em um determinado instante k , pode-se utilizar a eq. (6.5) para estimar o estado neste instante³

$$\boldsymbol{\rho}_k = (\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{v}_k. \quad (6.20)$$

Assim que um novo conjunto de dados estiver disponível⁴ $\mathbf{v}_{k+}$, pode-se usar a eq. (6.19) para estimar um novo estado que minimiza uma equação do tipo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_{k+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{H}_{k+} \end{bmatrix} \boldsymbol{\rho} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_k \\ \boldsymbol{\nu}_{k+} \end{bmatrix}, \quad (6.21)$$

cujo índice a ser minimizado é

$$IE = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_k^T & \boldsymbol{\nu}_{k+}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_k^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{k+}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_k \\ \boldsymbol{\nu}_{k+} \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

A estimativa para $\boldsymbol{\rho}_{k+}$ que minimiza este índice quadrático é dada pela eq. (6.5). Substituindo a eq. (6.19) na equação acima, chega-se a

$$\boldsymbol{\rho}_{k+} = [\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k + \mathbf{H}_{k+}^T \mathbf{R}_{k+}^{-1} \mathbf{H}_{k+}]^{-1} [\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{v}_k + \mathbf{H}_{k+}^T \mathbf{R}_{k+}^{-1} \mathbf{v}_{k+}]. \quad (6.23)$$

³Por motivo de clareza, simplifica-se a notação $\mathbf{H}_k(\boldsymbol{\rho}_k^{(-)})$ para $\mathbf{H}_k$.

⁴Nesta dedução, os índices k e $k+$ referem-se a instantes antes e depois da chegada de novos dados dos sensores respectivamente.

Definindo $\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k = \mathbf{P}_k^{-1}$ e usando uma identidade matricial⁵, obtém-se

$$\boldsymbol{\rho}_{k+} = \{\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+}^T [\mathbf{H}_{k+} \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+}^T + \mathbf{R}_{k+}]^{-1} \mathbf{H}_{k+} \mathbf{P}_k\} \{\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{v}_k + \mathbf{H}_{k+}^T \mathbf{R}_{k+}^{-1} \mathbf{v}_{k+}\}. \quad (6.24)$$

Como $\boldsymbol{\rho}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{v}_k$ (vide eq. (6.20)), pode-se reescrever

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_{k+} = & \boldsymbol{\rho}_k - \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+}^T [\mathbf{H}_{k+} \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+}^T + \mathbf{R}_{k+}]^{-1} \mathbf{H}_{k+} \boldsymbol{\rho}_k + \\ & + \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+}^T \{\mathbb{I} - [\mathbf{H}_{k+} \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+}^T + \mathbf{R}_{k+}]^{-1} \mathbf{H}_{k+} \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+}^T\} \mathbf{R}_{k+}^{-1} \mathbf{v}_{k+}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

onde $\mathbb{I}$ é a matriz identidade. Usando $\mathbb{I} = [\mathbf{H}_{k+} \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+}^T + \mathbf{R}_{k+}]^{-1} [\mathbf{H}_{k+} \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+}^T + \mathbf{R}_{k+}]$, chega-se ao seguinte resultado:

$$\boldsymbol{\rho}_{k+} = \boldsymbol{\rho}_k + \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+}^T [\mathbf{H}_{k+} \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+}^T + \mathbf{R}_{k+}]^{-1} \{\mathbf{v}_{k+} - \mathbf{H}_{k+} \boldsymbol{\rho}_k\} \quad (6.26)$$

ou

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+}^T [\mathbf{H}_{k+} \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+}^T + \mathbf{R}_{k+}]^{-1} \quad (6.27)$$

$$\boldsymbol{\rho}_{k+} = \boldsymbol{\rho}_k + \mathbf{G}_k (\mathbf{v}_{k+} - \mathbf{H}_{k+} \boldsymbol{\rho}_k), \quad (6.28)$$

onde $\mathbf{G}_k$ é o ganho do filtro de Kalman. Salienta-se aqui que $\mathbf{v}_{k+}$ representa as novas medidas obtidas no instante k , enquanto que $\mathbf{H}_{k+} \boldsymbol{\rho}_k$ representa as medidas que seriam obtidas caso a estimativa $\boldsymbol{\rho}_k$ fosse correta.

Se $\mathbf{H}$ for substituída por $[\mathbf{H}_k \quad \mathbf{H}_{k+}]^T$, $\mathbf{P}_{k+}$ fica

$$\mathbf{P}_{k+} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k^T & \mathbf{H}_{k+}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_k^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{k+}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{H}_{k+} \end{bmatrix} \right\}^{-1} = [\mathbf{P}_k^{-1} + \mathbf{H}_{k+}^T \mathbf{R}_{k+}^{-1} \mathbf{H}_{k+}]^{-1}, \quad (6.29)$$

e usando a mesma identidade matricial, chega-se a

$$\mathbf{P}_{k+} = \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+}^T [\mathbf{H}_{k+} \mathbf{P}_k \mathbf{H}_{k+}^T + \mathbf{R}_{k+}]^{-1} \mathbf{H}_{k+} \mathbf{P}_k = [\mathbb{I} - \mathbf{G}_k \mathbf{H}_{k+}] \mathbf{P}_k \quad (6.30)$$

⁵ $[\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R} \mathbf{H}]^{-1} = \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{H}^T [\mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}^{-1}]^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}$

Mostra-se também que é possível reescrever esta equação de uma forma mais estável numericamente e garantindo simetria da matriz de covariância. Esta forma é chamada *Forma de Joseph* (29, p. 237), e é dada por

$$\mathbf{P}_{k+} = [\mathbb{I} - \mathbf{G}_k \mathbf{H}_{k+}] \mathbf{P}_k [\mathbb{I} - \mathbf{G}_k \mathbf{H}_{k+}]^T + \mathbf{G}_k \mathbf{R}_{k+} \mathbf{G}_k^T \quad (6.31)$$

6.3.4 Equações do filtro

Assumindo que o intervalo de tempo entre k e $k+$ é muito pequeno, pode-se reescrever as eq. (6.6), eq. (6.8), eq. (6.27), eq. (6.28) e eq. (6.31) da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\rho}_k^{(-)} = \boldsymbol{\Phi}_{k-1} \boldsymbol{\rho}_{k-1}^{(+)} \quad (6.32)$$

$$\mathbf{P}_k^{(-)} = \boldsymbol{\Phi}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^{(+)} \boldsymbol{\Phi}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (6.33)$$

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{P}_k^{(-)} \mathbf{H}_k^T [\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^{(-)} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k]^{-1} \quad (6.34)$$

$$\boldsymbol{\rho}_k^{(+)} = \boldsymbol{\rho}_k^{(-)} + \mathbf{G}_k [\mathbf{v}_k - \mathbf{H}_k \boldsymbol{\rho}_k^{(-)}] \quad (6.35)$$

$$\mathbf{P}_k^{(+)} = [\mathbb{I} - \mathbf{G}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_k^{(-)}, \quad (6.36)$$

onde as eq. (6.32) e eq. (6.33) representam o estágio de *propagação* e as eq. (6.34), eq. (6.35) e eq. (6.36) representam o estágio de *atualização*.

Nestas equações, $\boldsymbol{\rho}$ é o vetor de estado, $\mathbf{v}_k$ é o vetor de tensões medidas nos eletrodos, $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de transição de estado, $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de covariância do erro de estimação, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de covariância do ruído do estado, $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{ep \times n}$ é a matriz de observação do sistema, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{ep \times ep}$ é a matriz de covariância do ruído de medida e $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times ep}$ é a matriz de ganho do filtro de Kalman.

Cada iteração do filtro é realizado da seguinte maneira: partindo-se de um estado $\boldsymbol{\rho}_{k-1}^{(+)}$ e de sua matriz de covariância do erro de estimação $\mathbf{P}_{k-1}^{(+)}$, usa-se a eq. (6.32) e eq. (6.33) para propagar o estado e a matriz de covariância para o instante imediatamente

antes de receber informações dos sensores⁶ ($\boldsymbol{\rho}_k^{(-)}$ e $\boldsymbol{P}_k^{(-)}$). Logo após o recebimento dos novos dados ($\boldsymbol{v}_k$), o ganho do filtro é calculado através da eq. (6.34) e através das eq. (6.35) e eq. (6.36) são atualizados⁷ o estado e a matriz de covariância ($\boldsymbol{\rho}_k^{(+)}$ e $\boldsymbol{P}_k^{(+)}$).

6.4 Características e influências de $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{R}$

A matriz de covariância do erro de estimação inicial, $\boldsymbol{P}_0$, deve ser escolhida de modo a indicar o intervalo de confiança do estado inicial $\boldsymbol{\rho}_0$, enquanto que a matriz de covariância do ruído das medidas $\boldsymbol{R}_k$ é definida pelo nível de ruído das medições e a matriz de covariância do estado $\boldsymbol{Q}_k$ deve ser tal que evite que $\boldsymbol{P}_k$ torne-se muito pequena, mantendo o filtro sensível às novas informações.

6.4.1 Matriz de covariância do erro de estimação - $\boldsymbol{P}$

Os filtros de Kalman minimizam o traço da matriz $\boldsymbol{P}_k$, então quanto menores forem os seus valores, menor será a influência do filtro sobre as estimativas. A matriz $\boldsymbol{P}_k$ é afetada pelas matrizes $\boldsymbol{Q}_k$ e $\boldsymbol{R}_k$ como mostram as equações do FEK. Maiores valores na matriz $\boldsymbol{R}_k$, indicando que as medidas obtidas não são muito confiáveis, causam menores valores nas matrizes $\boldsymbol{P}_k$ e $\boldsymbol{G}_k$ e menores serão as correções feitas no estado pelo filtro. A matriz $\boldsymbol{Q}_k$ é somada à matriz $\boldsymbol{P}_k$, causando um aumento dos valores dos seus elementos e mantendo o filtro aberto a novas informações. Segundo Trigo, Lima e Amato(7), a influência da matriz $\boldsymbol{P}_0$ no comportamento do filtro não é essencial, pois após algumas poucas iterações o filtro ajusta apropriadamente a matriz $\boldsymbol{P}_k$.

6.4.2 Matriz de covariância do ruído do estado - $\boldsymbol{Q}$

Os elementos da matriz $\boldsymbol{Q}_k$ estão relacionados com a velocidade de mudança do estado nos elementos da malha de elementos finitos. Qualitativamente, menores valores em $\boldsymbol{Q}_k$ causam menores alterações no estado e maiores serão os erros de atraso do filtro, entretanto

⁶o sobrescrito $(-)$ indica instante imediatamente antes do filtro receber novas medidas dos sensores

⁷o sobrescrito $(+)$ indica instante imediatamente após o filtro receber novas medidas dos sensores

maiores valores dos elementos de $\mathbf{Q}_k$ indicam que o sistema é regido por grande ruído no estado ou que o modelo adotado para o sistema falha em descrever a dinâmica.

Diversos pesquisadores adotaram para $\mathbf{Q}_k$ uma matriz diagonal. Isto significa que as resistividades dos elemento da malha são mutuamente ortogonais, isto é, a variação de resistividade de um elemento não causa tendência de mudança de resistividade dos elementos vizinhos. Na realidade isto não ocorre pois a variação de resistividade dos elementos que representam os pulmões têm a tendência de variarem em conjunto. Um ponto levantado por Vauhkonen, Karjalainen e Kaipio(2), é que pode-se utilizar da matriz $\mathbf{Q}_k$ para impor limitação na variação de resistividade de alguns tecidos, como os tecidos ósseo, adiposo, e muscular esquelético.

6.4.3 Matriz de covariância do ruído de medida - $\mathbf{R}$

Os elementos da matriz $\mathbf{R}_k$ indicam o nível de incerteza das medidas realizadas pelos eletrodos. Além disto, segundo Vauhkonen, Karjalainen e Kaipio(2) esta matriz também deve levar em conta o erro de linearização do problema, que causa a não diagonalidade da matriz $\mathbf{R}_k$. Tal fato pode ser observado na eq. (6.10): Ao se desprezar efeitos de segunda ordem após a linearização, acrescenta-se a $\boldsymbol{\nu}$ estes erros, o que faz o ruído ser maior e não diagonal. Apesar disto, caso a variação de resistividade no $\boldsymbol{\Gamma}$ não seja muito acentuada, o maior efeito que $\mathbf{R}_k$ deve levar em conta é a incerteza dos eletrodos, então o uso de uma matriz diagonal é satisfatória. Neste trabalho, uma matriz diagonal é utilizada.

7 MODELO DE EVOLUÇÃO DO ESTADO

Para que os filtros de Kalman possam ser utilizados, uma matriz de transição Φ deve ser fornecida ao filtro. Tal matriz deve representar a evolução temporal do sistema.

O modelo de evolução mais usado até o momento é chamado *passeio aleatório*. Este modelo foi usado nos trabalhos de Vauhkonen, Karjalainen e Kaipio(2), Kaipio, Karjalainen e Somersalo(3), Kim et al.(5), Kim et al.(22) e Trigo(4).

Trigo(4) cita duas justificativas para o uso de tal modelo: o primeiro é a falta de modelos capazes de descrever o comportamento do sistema cardíaco-respiratório levando em conta todos os processos biológicos; o segundo é a elevada taxa de aquisição de dados que os circuitos eletrônicos ligados ao tomógrafo são capazes de realizar.

Este modelo supõe um modelo de evolução invariante, ou seja:

$$\Phi = \mathbb{I}, \quad (7.1)$$

Desta forma a equação de estado (eq. (6.6)) discreta fica da forma

$$\rho_{k+1} = \rho_k + \xi_k. \quad (7.2)$$

e toda a dinâmica do sistema é admitida ser devida à incerteza ξ_k .

No trabalho de Vauhkonen, Karjalainen e Kaipio(2), os autores comentam duas possibilidades para determinar um modelo mais fidedigno da dinâmica cardíaco-respiratório: o primeiro propõe o uso de um modelo separado em sub-sistemas que afetam a estimação das imagens; o segundo propõe o uso de modelos de ordem

elevada juntamente com algoritmos iterativos para encontrar modelos que apresentam suavidade temporal das imagens. No presente trabalho, utiliza-se um algoritmo relativo para determinar imagens utilizadas para gerar uma matriz de transição Φ . O algoritmo escolhido é o caixa-preta.

Mesmo que um sistema dinâmico seja contínuo no tempo, a amostragem das grandezas físicas geralmente são discretas no tempo, pois são realizadas por circuitos digitais de aquisição de dados, então o desenvolvimento deste modelo deve levar este fato em conta.

7.1 Modelo de evolução do sistema

Como hipótese, considera-se que os processos que ocorrem dentro de Γ sigam uma dinâmica tal que a distribuição de resistividade acompanhe a seguinte equação diferencial matricial ordinária de segunda ordem, com coeficientes constantes:

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\rho}}(t) + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\rho}}(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{0}. \quad (7.3)$$

Tal hipótese pode ser assumida nos casos de monitoramento das condições pulmonares devido às inércias presentes no sistema cardíaco-respiratório que causam variações temporais suaves de resistividade, como por exemplo o fluxo sanguíneo nos vasos, o ciclo cardíaco, o processo de inflação e deflação dos pulmões e os movimentos da caixa torácica devido ao movimento do diafragma.

A equação diferencial dada pela eq. (7.3) é comum em sistemas mecânicos vibracionais (31), (9). Nestes sistemas, a matriz $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa a inércia do sistema à perturbações de seu estado atual, quanto maior o seu valor, menores os valores de $\ddot{\boldsymbol{\rho}}$. A matriz $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ está associada ao amortecimento viscoso que este sistema possui, está ligada ao quanto o sistema dissipa energia. A matriz $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa a rigidez do sistema, está ligada ao quanto de energia o sistema armazena e libera durante o ciclo.

7.1.1 Tempo contínuo

Pode-se reescrever a eq. (7.3) com um vetor de estados expandido $\hat{\boldsymbol{\rho}} \in \mathbb{R}^{2n}$ no tempo contínuo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{d\hat{\boldsymbol{\rho}}}{dt} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0}, \quad (7.4)$$

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \dot{\boldsymbol{\rho}} \end{Bmatrix}, \quad (7.5)$$

isolando $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ na esquerda da equação, obtém-se

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\rho}}}{dt} = \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\rho}}, \quad (7.6)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}. \quad (7.7)$$

A matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ recebe o nome de matriz dinâmica do sistema contínuo pois agrupa em si todas as propriedades dinâmicas do sistema. A eq. (7.6) descreve a evolução do estado do sistema ao longo do tempo contínuo quando não há interferência externa.

Assumindo uma solução do tipo $\hat{\boldsymbol{\rho}}(t) = \bar{\boldsymbol{\rho}}.e^{st}$, derivando-a com respeito ao tempo e substituindo-se na eq. (7.6), chega-se a

$$\mathbf{A}\bar{\boldsymbol{\rho}} = \bar{\boldsymbol{\rho}}s, \quad (7.8)$$

que é um problema de auto-valores s e auto-vetores $\bar{\boldsymbol{\rho}}$. Note que a matriz dinâmica do sistema aparece explicitamente nesta equação.

Mostra-se também (31) que a resposta do sistema ao longo do tempo é do tipo

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}(t) = \sum_{r=1}^n (a_r \bar{\boldsymbol{\rho}}_r e^{s_r t} + b_r \bar{\boldsymbol{\rho}}_r^* e^{s_r^* t}), \quad (7.9)$$

onde a_r e b_r dependem das condições iniciais do problema, s_r e s_r^* são pares de auto-valores complexos conjugados e $\bar{\boldsymbol{\rho}}_r$ e $\bar{\boldsymbol{\rho}}_r^* \in \mathbb{R}^{2n}$ são pares de auto-vetores conjugados.

7.1.2 Tempo discreto

Os dados amostrados por um sistema computacional são de caráter discreto, ou seja, existe um período T de amostragem. Utilizando um amostrador por impulsos de período de amostragem T , pode-se escrever a eq. (7.9) da seguinte forma:

$$\hat{\rho}(k) = \sum_{r=1}^n (a_r \bar{\rho}_r e^{s_r k T} + b_r \bar{\rho}_r^* e^{s_r^* k T}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (7.10)$$

Não fazendo qualquer distinção entre pares conjugados, a equação fica

$$\hat{\rho}(k) = \sum_{r=1}^{2n} (a_r \bar{\rho}_r) e^{s_r k T} \quad (7.11)$$

Escrevendo esta equação na forma matricial para $k = 1, 2, \dots, 2n$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \hat{\rho}_{(1)} & \hat{\rho}_{(2)} & \cdots & \hat{\rho}_{(2n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \bar{\rho}_1 & a_2 \bar{\rho}_2 & \cdots & a_{2n} \bar{\rho}_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{s_1(1T)} & e^{s_1(2T)} & \cdots & e^{s_1(2nT)} \\ e^{s_2(1T)} & e^{s_2(2T)} & \cdots & e^{s_2(2nT)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{s_{2n}(1T)} & e^{s_{2n}(2T)} & \cdots & e^{s_{2n}(2nT)} \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

ou

$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}} \mathbb{E}, \quad (7.13)$$

onde $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\bar{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e $\mathbb{E} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$

Adotando agora um intervalo de tempo arbitrário $\Delta t = iT$, $i \in \mathbb{N}$, pode-se escrever uma equação com as respostas defasadas em relação às coletadas na eq. (7.12):

$$\begin{bmatrix} \hat{\rho}_{(1+i)} & \hat{\rho}_{(2+i)} & \cdots & \hat{\rho}_{(2n+i)} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{X}} \begin{bmatrix} e^{s_1(1T+\Delta t)} & e^{s_1(2T+\Delta t)} & \cdots & e^{s_1(2nT+\Delta t)} \\ e^{s_2(1T+\Delta t)} & e^{s_2(2T+\Delta t)} & \cdots & e^{s_2(2nT+\Delta t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{s_{2n}(1T+\Delta t)} & e^{s_{2n}(2T+\Delta t)} & \cdots & e^{s_{2n}(2nT+\Delta t)} \end{bmatrix}. \quad (7.14)$$

Definindo a matriz $\Sigma \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ diagonal, contendo em cada elemento não nulo os $2n$ auto-valores s_r

$$\Sigma = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{2n} \end{bmatrix}, \quad (7.15)$$

e aplicando a propriedade da exponencial de uma matriz diagonal

$$[e^{\Sigma \Delta t}] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\Sigma \Delta t)^i}{i!} = \begin{bmatrix} e^{s_1 \Delta t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{s_2 \Delta t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{s_{2n} \Delta t} \end{bmatrix}, \quad (7.16)$$

pode-se reescrever a eq. (7.14) da seguinte maneira:

$$\mathbf{X}^+ = (\bar{\mathbf{X}}[e^{\Sigma \Delta t}])\mathbb{E}, \quad (7.17)$$

$$\mathbf{X}^+ = \bar{\mathbf{X}}^+\mathbb{E}, \quad (7.18)$$

$$\bar{\mathbf{X}}^+ = \bar{\mathbf{X}}[e^{\Sigma \Delta t}]. \quad (7.19)$$

Agrupando eq. (7.13) e eq. (7.18), monta-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}}\mathbb{E}, \\ \mathbf{X}^+ = \bar{\mathbf{X}}^+\mathbb{E} \end{cases}. \quad (7.20)$$

Contanto que $\mathbf{X}$ seja inversível, pode-se eliminar $\mathbb{E}$ do sistema de equações, resultando em

$$\mathbf{X}^+(\mathbf{X}^{-1})\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}}^+. \quad (7.21)$$

Substituindo eq. (7.19) na eq. (7.21), obtém-se

$$\mathbf{X}^+(\mathbf{X}^{-1})\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}}[e^{\Sigma \Delta t}]. \quad (7.22)$$

Comparando a eq. (7.8) com a equação formada por cada uma das colunas da matriz $\bar{\mathbf{X}}$ na eq. (7.22), conclui-se que a matriz dinâmica no tempo discreto do sistema é

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{X}^+(\mathbf{X}^{-1}), \quad (7.23)$$

e os auto-valores discretos são os elementos da diagonal de $[e^{\Sigma\Delta t}]$:

$$\Sigma_d = [e^{\Sigma\Delta t}]. \quad (7.24)$$

Como na matriz Σ estão os auto-valores no tempo contínuo s_r , a equação acima mostra a relação entre as transformadas z (discreta no tempo) e s (contínua no tempo).

Pode-se escrever a eq. (7.23) como

$$\mathbf{X}^+ = \mathbf{A}_d \mathbf{X}, \quad (7.25)$$

e observando a relação entre cada coluna de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}^+$, obtém-se a equação de evolução do estado expandido

$$\hat{\rho}_{(k+i)} = \mathbf{A}_d \hat{\rho}_{(k)} \quad (7.26)$$

Conclui-se finalmente que matriz de transição do estado expandido entre dois instantes sucessivos é a matriz $\mathbf{A}_d$ quando $i = 1$:

$$\Phi_{(k+1,k)} = \mathbf{X}^+(\mathbf{X}^{-1}) \quad (7.27)$$

$$\hat{\rho}_{k+1} = \Phi_{(k+1,k)} \hat{\rho}_k \quad (7.28)$$

$$\hat{\rho}_k = \begin{bmatrix} \rho_k \\ \rho_{k+1} \end{bmatrix}. \quad (7.29)$$

7.2 Ruído e erros de medidas

Para reduzir o erro na determinação da matriz de transição Φ devido a presença de ruído e erro nas medições, é aconselhável utilizar mais do que $2n$ instantes sucessivos para montar $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}^+$. Com isto estas matrizes tornar-se-ão retangulares, então o método dos mínimos quadrados pode ser utilizado (32) na eq. (7.21), resultando em

$$(\mathbf{X}^+ \mathbf{X}^T)(\mathbf{X} \mathbf{X}^T)^{-1} \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}}[e^{\Sigma \Delta t}], \quad (7.30)$$

e matriz Φ é determinada por

$$\Phi = (\mathbf{X}^+ \mathbf{X}^T)(\mathbf{X} \mathbf{X}^T)^{-1}. \quad (7.31)$$

Caso o termo $\mathbf{X} \mathbf{X}^T$ seja mal condicionado, adiciona-se uma regularização de Tikhonov para calcular sua inversa, desta forma tem-se:

$$\Phi = (\mathbf{X}^+ \mathbf{X}^T)(\mathbf{X} \mathbf{X}^T + \alpha \mathbb{I})^{-1}, \quad (7.32)$$

onde α é um parâmetro de regularização. Os efeitos da regularização de Tikhonov sobre a matriz de transição são discutidos na seção 10.1.4.

7.3 Estado expandido

A eq. (7.29) define um estado expandido que deve ser utilizado no filtro de Kalman. As equações do FEK permanecem inalteradas, porém a ordem das matrizes muda.

As equações do FEK para sistemas discretos considerando o estado expandido são

$$\hat{\rho}_k^{(-)} = \Phi_{k-1} \hat{\rho}_{k-1}^{(+)} \quad (7.33)$$

$$\hat{P}_k^{(-)} = \Phi_{k-1} \hat{P}_{k-1}^{(+)} \Phi_{k-1}^T + \hat{Q}_{k-1} \quad (7.34)$$

$$\hat{G}_k = \hat{P}_k^{(-)} \hat{H}_k^T [\hat{H}_k \hat{P}_k^{(-)} \hat{H}_k^T + \hat{R}_k]^{-1} \quad (7.35)$$

$$\hat{\rho}_k^{(+)} = \hat{\rho}_k^{(-)} + \hat{G}_k [\hat{v}_k - \hat{H}_k \hat{\rho}_k^{(-)}] \quad (7.36)$$

$$\hat{P}_k^{(+)} = [\mathbb{I} - \hat{G}_k \hat{H}_k] \hat{P}_k^{(-)}, \quad (7.37)$$

onde $\hat{P}, \hat{Q} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\hat{R} \in \mathbb{R}^{2ep \times 2ep}$, $\hat{G} \in \mathbb{R}^{2n \times 2ep}$, $\hat{H} \in \mathbb{R}^{2ep \times 2n}$.

Neste trabalho, utiliza-se as seguintes matrizes:

$$\hat{P}_0 = \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix} \quad \hat{Q}_k = \begin{bmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & Q_{k-1} \end{bmatrix} \quad (7.38)$$

$$\hat{R}_k = \begin{bmatrix} R_k & 0 \\ 0 & R_{k-1} \end{bmatrix} \quad \hat{H}_k = \begin{bmatrix} H_k & 0 \\ 0 & H_{k-1} \end{bmatrix} \quad (7.39)$$

$$\hat{v}_k = \begin{bmatrix} v_k \\ v_{k-1} \end{bmatrix}. \quad (7.40)$$

As matrizes $\hat{Q}_k$, $\hat{H}_k$ e $\hat{R}_k$ na forma bloco diagonal implicam que não há correlação entre dois instantes sucessivos.

8 SEQUÊNCIA DE IMAGENS

Para que a eq. (7.32) possa ser utilizada, uma sequência de imagens ou estimações que mostra a evolução do estado dentro do domínio deve estar disponível. Tal sequência deve possuir periodicidade constante e ser grande o suficiente para que possa gerar uma matriz de transição adequada.

Esta sequência de imagens pode ser proveniente de várias fontes: de modelos matemáticos que descrevem a dinâmica; imagens médicas; de bancos de dados estatísticos; ou ainda serem obtidas diretamente do domínio.

Seja qual for o caso, a matriz de transição é gerada a partir de dados obtidos no passado, então assume-se que o sistema não tenha sofrido mudanças drásticas em relação à dinâmica obtida com as imagens. Caso isto ocorra, a matriz de transição deixa de ser válida e os filtros de Kalman terão menos informação sobre o sistema para as estimativas.

Neste trabalho, uma sequência de imagens é gerada a partir de um algoritmo relativo que traz as seguintes vantagens: é robusto e tem capacidade de gerar imagens de qualidade suficiente e em tempo adequado; nenhum equipamento adicional é necessário, pois o próprio equipamento de TIE pode ser utilizado para gerar as imagens e utilizá-las no filtro de Kalman; é possível configurar o algoritmo para que determine, em intervalos de tempos arbitrários, uma nova matriz de transição de forma a manter o modelo o mais atualizado possível em relação ao sistema e assim manter a qualidade das informações usadas no filtro de Kalman.

Neste trabalho, o algoritmo caixa-preta aplicado à TIE foi escolhido como método

relativo para gerar a sequência de imagens. Este método foi primeiramente desenvolvido por Moura et al.(33) e Aya et al.(20) e mostrou-se um método promissor para obter imagens relativas devido sua robustez e capacidade de adaptação.

8.1 Algoritmo caixa-preta

A idéia principal deste método é que se boas imagens, relativas a variações de resistividade e boas medidas, relativas a variações das tensões em $\partial\Gamma$ estão disponíveis, então a matriz que relaciona imagens e medidas pode ser estimada. O algoritmo caixa-preta estima diretamente a matriz $\mathbb{B}$ do algoritmo de retro-projeção (13) através das variações das tensões medidas em $\partial\Gamma$ causadas pela variação de resistividade de cada um dos elementos da malha de elementos finitos que discretiza Γ . O método assume linearidade entre as variações de tensões e variações de resistividade.

Primeiramente é assumida uma resistividade inicial que é usada como referência. Com esta referência, as tensões são calculadas resolvendo o problema direto para cada um dos padrões de corrente. Então uma perturbação de resistividade em um dos elementos é imposta, novamente o problema direto é resolvido e a diferença de tensão entre o estado perturbado e o de referência é calculada. Repetindo-se este procedimento para todos os elementos, uma matriz de perturbações de tensões pode ser montada. Esta matriz, juntamente com uma matriz que representa as perturbações, determinam $\mathbb{B}$. Neste trabalho os parâmetros dos eletrodos são assumidas conhecidas, porém este método pode ser modificado para englobar estes valores.

O procedimento para determinar $\mathbb{B}$ é explicado a seguir.

8.2 Algoritmo

1. Assume-se uma distribuição de resistividade conhecida em cada um dos n elementos que discretizam Γ , arranjados em um vetor $\boldsymbol{\rho}^0 \in \mathbb{R}^n$. A linearização do modelo é feita em torno deste estado;
2. Cada padrão de corrente é denotado por $\mathbf{I}_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, 2, \dots, p$;
3. A tensão de referência em cada padrão de corrente $\mathbf{v}_j^0 \in \mathbb{R}^e$ é determinado pelo problema direto (eq. (5.1)), guardando-se apenas os valores relativos aos nós que representam os eletrodos.

$$\mathbf{Y}(\boldsymbol{\rho}^0)\mathbf{v}_j^0 = \mathbf{I}_j, \quad j = 1, 2, \dots, p; \quad (8.1)$$

4. A perturbação na resistividade de um elemento é denotada por $\delta\rho_i$, $i = 1, 2, \dots, n$;
5. Vetores $\boldsymbol{\delta\rho}^i \in \mathbb{R}^n$ são formados de forma que todos os elementos sejam nulos, com exceção do i -ésimo elemento, que contém $\delta\rho_i$, isto é, $\delta\rho_i^i = \delta\rho_i$;
6. Para cada um dos padrões de corrente, as tensões nos eletrodos $\mathbf{v}_j^i$ relativas a cada uma das perturbações $\boldsymbol{\delta\rho}^i$, $i = 1, 2, \dots, n$ são determinadas pela resolução do problema direto

$$\mathbf{Y}(\boldsymbol{\rho}^0 + \boldsymbol{\delta\rho}^i)\mathbf{v}_j^i = \mathbf{I}_j; \quad (8.2)$$

7. Seja $\mathbf{v}^0 \in \mathbb{R}^{ep}$ um vetor estendido formado por todos $\mathbf{v}_j^0$, $j = 1, 2, \dots, p$, tal que

$$\mathbf{v}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^0 \\ \mathbf{v}_2^0 \\ \dots \\ \mathbf{v}_p^0 \end{bmatrix}; \quad (8.3)$$

8. Seja $\mathbf{v}^i \in \mathbb{R}^{ep}$ um vetor estendido formado por todos $\mathbf{v}_j^i$, $j = 1, 2, \dots, e$, tal que

$$\mathbf{v}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^i \\ \mathbf{v}_2^i \\ \dots \\ \mathbf{v}_p^i \end{bmatrix}; \quad (8.4)$$

9. Forma-se o vetor normalizado $\boldsymbol{\psi}^i \in \mathbb{R}^n$ tal que cada um dos $k = 1, 2, \dots, n$ elementos deste vetor seja

$$\psi_k^i = \frac{\delta \rho_k^i}{\rho_k^0}; \quad (8.5)$$

10. Forma-se o vetor normalizado $\boldsymbol{\theta}^i \in \mathbb{R}^{ep}$ tal que cada um dos $k = 1, 2, \dots, ep$ elementos deste vetor seja

$$\theta_k^i = \frac{v_k^i - v_k^0}{v_k^0}; \quad (8.6)$$

11. Define-se a matriz $\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}^1 & \dots & \boldsymbol{\psi}^i & \dots & \boldsymbol{\psi}^n \end{bmatrix}, \quad (8.7)$$

observe que esta matriz é diagonal;

12. Define-se a matriz $\boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{R}^{ep \times n}$ tal que

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^1 & \dots & \boldsymbol{\theta}^i & \dots & \boldsymbol{\theta}^n \end{bmatrix}; \quad (8.8)$$

13. Cada coluna de $\boldsymbol{\Psi}$ é uma imagem e pode ser relacionada com uma coluna de $\boldsymbol{\Theta}$ por uma matriz de retro-projeção $\mathbb{B} \in \mathbb{R}^{n \times ep}$

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbb{B}\boldsymbol{\Theta}; \quad (8.9)$$

14. Finalmente, determina-se a matriz $\mathbb{B}$ que minimiza um erro quadrático dado pela eq. (8.13).

Uma vez que $\mathbb{B}$ foi obtida, uma imagem relativa pode ser obtida por

$$\Delta \boldsymbol{\rho} = \mathbb{B} \Delta \mathbf{V}, \quad (8.10)$$

onde cada elemento de $\Delta \boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^n$ e $\Delta \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{ep}$ são dados por

$$\Delta \rho_i = \frac{\rho_i - \rho_i^0}{\rho_i^0}, \quad (8.11)$$

$$\Delta V_k = \frac{V_k^{medido} - V_{0k}^{medido}}{V_{0k}^{medido}}. \quad (8.12)$$

8.3 Determinação de $\mathbb{B}$

A matriz $\mathbb{B}$ é determinada conforme os trabalhos de Aya et al.(20), usando o algoritmo heurístico. Neste trabalho os autores constatam a má condição da matriz $\boldsymbol{\Theta}$ e propõe métodos de regularização para contornar o problema.

Um índice de erro é definido por

$$IE = tr \{ \mathbf{D}^T \mathbf{D} + \alpha \mathbb{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbb{B} + \beta \mathbb{B}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbb{B} \}, \quad (8.13)$$

onde $\mathbf{F}$ é uma matriz de filtro passa alta espacial gaussiano considerando uma coluna de $\mathbb{B}$ como uma imagem, $\mathbf{S}$ é uma matriz de sensibilidade uniforme, α e β são parâmetros de regularização e a matriz $\mathbf{D}$ é definida como

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\Psi} - \mathbb{B}\boldsymbol{\Theta}). \quad (8.14)$$

A matriz $\mathbf{S}$ é diagonal e em cada elemento de sua diagonal há um número computado por:

$$S_{ii} = r(i)^p, \quad (8.15)$$

onde $r(i)$ é a razão entre a distância do centróide do i -ésimo até o centro do domínio e a

distância do centro até $\partial\mathbf{\Gamma}$ na mesma posição angular do centróide e p é um parâmetro real ajuste experimentalmente para atenuar os efeitos de sensibilidade não uniforme conforme Nan(34).

Tomando o mesmo procedimento que é usado na eq. (6.3), a matriz $\mathbb{B}$ é determinada por

$$\mathbb{B} = (\mathbf{\Theta}^T \mathbf{\Theta} + \alpha \mathbf{F}^T \mathbf{F} + \beta \mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{\Psi} \mathbf{\Theta}^T. \quad (8.16)$$

PARTE III

METODOLOGIA E MATERIAL DE
ENSAIO

9 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

9.1 Algoritmo completo

A implementação completa planejada para o algoritmo desenvolvido neste trabalho é descrita abaixo. O algoritmo envolve três etapas principais: a primeira simula a aquisição de dados provenientes de um domínio cuja distribuição de resistividade varia com o tempo, a segunda parte identifica a matriz de transição e a terceira utiliza o FEK para estimar o estado do sistema.

1. Adota-se a geometria de $\partial\mathbf{\Gamma}$, em estudo;
2. Gera-se uma malha M_1 de elementos finitos com um grande número de elementos e e eletrodos, utilizando a geometria escolhida de $\partial\mathbf{\Gamma}$, para o uso no *phantom* numérico.
3. Assume-se arbitrariamente uma seqüência de vetores $\boldsymbol{\rho}_k^* \in \mathbb{R}^n$ para $k = 1, \dots, K$ que representam o comportamento temporal da resistividade de cada um dos elementos da malha ao longo do intervalo de tempo¹ 0 a KT . O comportamento da resistividade de cada elemento do vetor $\boldsymbol{\rho}_k^*$, deve ser suave em relação ao tempo, isto é, deve possuir a derivada temporal discreta limitada para evitar acelerações muito grandes:

$$\left\| \frac{d[\rho_k^*]_i}{dt} \right\| \cong \left\| \frac{[\rho_k^*]_i - [\rho_{k-1}^*]_i}{T} \right\| < \epsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9.1)$$

¹O número de instantes K deve ser maior ou igual a duas vezes o número de elementos da malha utilizada para resolver o problema inverso de modo a propiciar excesso de informação para gerar a matriz de transição pelo método dos mínimos quadrados.

onde ϵ é um número real finito positivo e T é o período da discretização temporal. Com esta discretização, só é possível observar variações nas imagens cujas frequências forem inferiores à metade da frequência de Nyquist ($f_N = \frac{\pi}{T} rad/s$).

4. Com a malha M_1 , $\boldsymbol{\rho}_k^*$ e os parâmetros de todos os eletrodos, resolve-se o problema direto. Com isto, gera-se um conjunto de K vetores de potenciais elétricos simulados $\mathbf{v}_k^{sim}$, que poderão ser usados para estimar o estado $\boldsymbol{\rho}_k^{*2}$. O vetor $\mathbf{v}_k^{sim} \in \mathbb{R}^{e^2}$ é formado pelo empilhamento das tensões em cada um dos eletrodos para todos os padrões de corrente, conforme eq. (6.15);
5. Com os valores das tensões obtidas $\mathbf{v}_k^{sim}$, adiciona-se um ruído branco de média nula $\boldsymbol{\nu}_k$ para simular a presença de erros de medida das tensões nos eletrodos. Esta etapa é opcional.

$$\mathbf{v}_k^{sim} = \mathbf{v}_k^{sim} + \boldsymbol{\nu}_k; \quad (9.2)$$

6. Gera-se uma segunda malha M_2 de elementos finitos com n elementos e e eletrodos, utilizando a geometria escolhida de $\partial\Gamma$, para o uso na solução do problema inverso. Tal malha tem um número menor de elementos para diminuir o número de incógnitas para o problema inverso e, assim, diminuir o problema de divergência. Além disto, o uso de malhas diferentes para a solução do problema direto e inverso evita o *crime inverso*³.
7. Utiliza-se o algoritmo caixa-preta para fazer estimativas do estado $\boldsymbol{\rho}_k^*$ utilizando $\mathbf{v}_k^{sim}$ ao longo do tempo $k = 1, \dots, K$. O algoritmo caixa-preta possui alguns parâmetros que devem ser ajustados de modo a obter as melhores estimativas para o estado.
8. Estas estimativas são utilizadas para gerar a matriz de transição do sistema Φ , conforme a eq. (7.32).

²Neste trabalho, o número de padrões de corrente e o número de medidas de tensões são iguais ao número de eletrodos $p = e$, isto significa que as dificuldades práticas de medição das tensões envolvendo eletrodos de injeção de corrente foram desprezados.

³Crime inverso é o uso indevido da mesma malha de elementos finitos para a solução do problema direto e inverso. Tal uso, causa mascaramento de possíveis problemas de modelagem e tende a melhorar, artificialmente, a condição do problema.

9. A mesma malha M_2 , juntamente com dados simulados de tensão e a matriz de transição são utilizados no FEK.

9.2 Ensaio 1

O primeiro ensaio realizado tem o objetivo de testar a matriz de transição gerada pela eq. (7.32) usando o modelo de evolução dado pela eq. (7.28). O ensaio é subdividido em 3 partes: a primeira (1A) utiliza o estado verdadeiro para estimar a matriz de transição; a segunda (1B) e a terceira (1C) utilizam o algoritmo caixa-preta para estimar o estado e então determinar a matriz de transição. O ensaio 1B com o objeto posicionado no centro de Γ e o ensaio 1C com o objeto na periferia de Γ . Justifica-se tal investigação devido ao problema de sensibilidade não uniforme comentado na seção 2.5.

9.2.1 Parte 1A

A parte 1A é realizada utilizando a distribuição de resistividade utilizada no phantom diretamente, isto é, utiliza-se a distribuição verdadeira de resistividade ρ_k^* para gerar a matriz de transição.

O objetivo desta primeira parte é estimar qual é o comportamento do sistema simulado pela eq. (7.28) quando se conhece exatamente o estado do sistema. Com isto, é possível comparar a evolução verdadeira do sistema dinâmico com a estimativa da evolução do sistema quando se tem as melhores estimativas possíveis do estado para usar na eq. (7.32).

O domínio utilizado possui geometria circular com $300mm$ de diâmetro, $e = 16$ eletrodos localizados equispaçados ao longo de $\partial\Gamma$. A distribuição de resistividade variante no tempo simula dois objetos circulares de diâmetro $80mm$ cada, com seus centros localizados a $55mm$ do centro e em posições diametralmente opostas como pode ser visto na Fig. (9.1(a)). A malha utilizada no ensaio possui 186 elementos e pode ser vista na Fig. (9.1(b)).

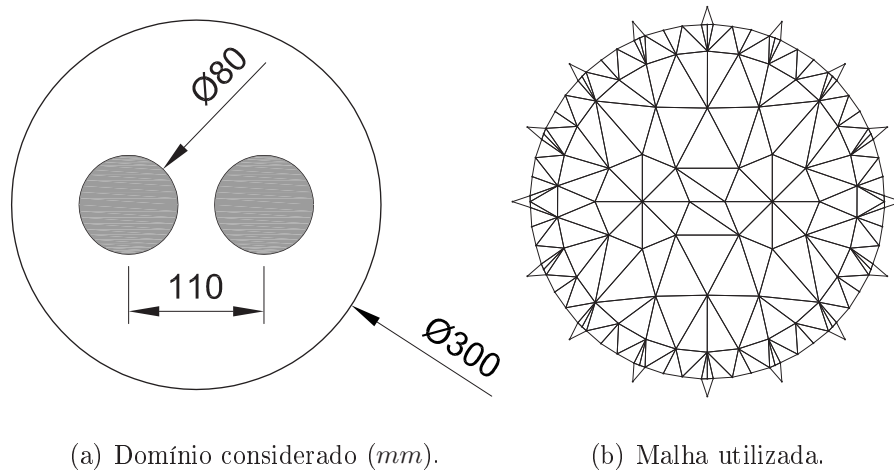


Figura 9.1: Domínio estudado.

A evolução temporal simulada considera o meio ao redor dos objetos com resistividade constante $\rho = 35.0\Omega m$, parâmetros de eletrodos constantes $\rho t = 0.02\Omega m^2$ e objetos com resistividade modelada como uma rampa de equação $\rho_{(k)} = \frac{10}{50}k + 35.0\Omega m$ $k = 1, 2, \dots, 400$, conforme pode ser visto na Fig. (9.2).

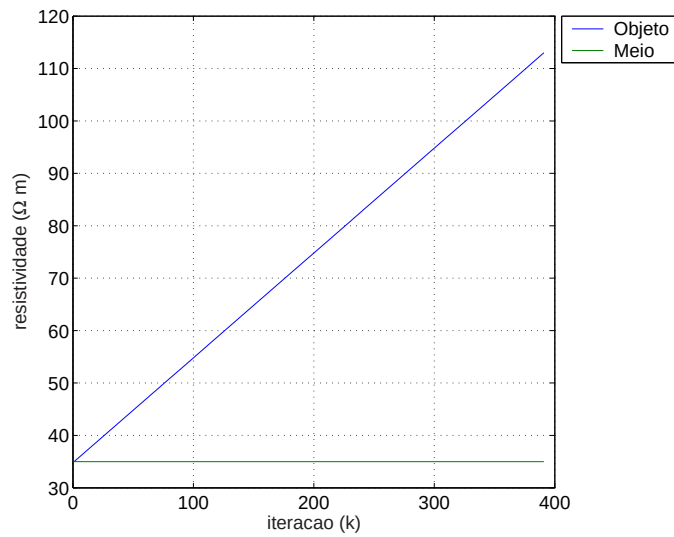


Figura 9.2: Evolução verdadeira do estado.

9.2.2 Parte 1B

A parte 1B é realizada utilizando o algoritmo caixa-preta para estimar imagens do domínio e usá-las para encontrar a matriz de transição.

O domínio utilizado possui geometria circular com $300mm$ de diâmetro, $e = 32$ eletrodos localizados equispaçados ao longo de $\partial\Gamma$. A distribuição de resistividade variante no tempo simula um objeto circular de diâmetro $40mm$, posicionado no cento de Γ como pode ser visto na Fig. (9.3(a)).

A malha utilizada no caixa-preta possui 514 elementos, como pode ser vista na Fig. (9.3(b)), enquanto que a malha utilizada no *phantom* numérico possui 6082 elementos, como ser vista na Fig. (9.4).

A evolução temporal simulada considera o meio ao redor dos objetos com resistividade constante $\rho = 35.0\Omega m$, parâmetros de eletrodos constantes $\rho t = 0.02\Omega m^2$ e objeto com resistividade modelada como uma rampa de equação $\rho_{(k)} = \frac{10}{50}k + 35.0\Omega m$ $k = 1, 2, \dots, 1500$.

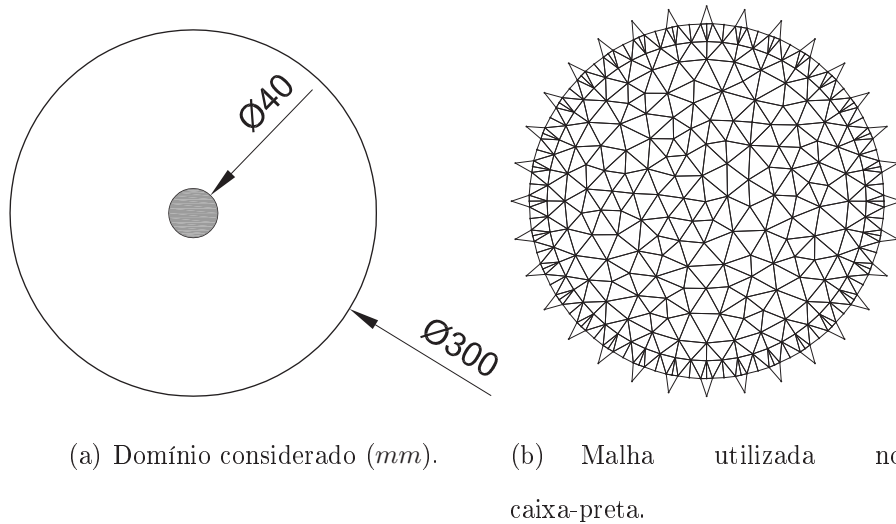


Figura 9.3: Domínio estudado.

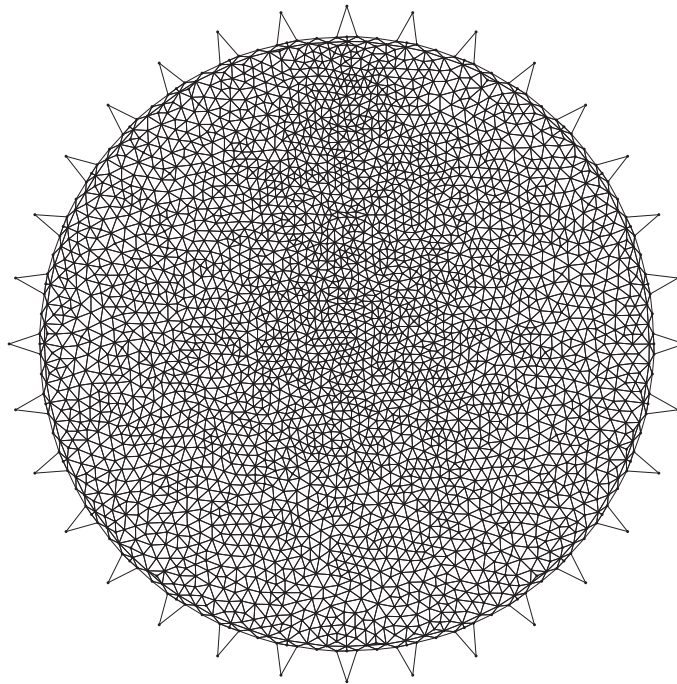


Figura 9.4: Malha utilizada no *phantom*.

9.2.3 Parte 1C

A parte 1C é realizada utilizando o algoritmo caixa-preta para estimar imagens do domínio e usá-las para encontrar a matriz de transição.

O domínio utilizado possui a mesma geometria da parte 1B, porém a distribuição de resistividade variante no tempo simula um objeto circular de diâmetro $40mm$, posicionado a $126mm$ do cento de Γ como pode ser visto na Fig. (9.5).

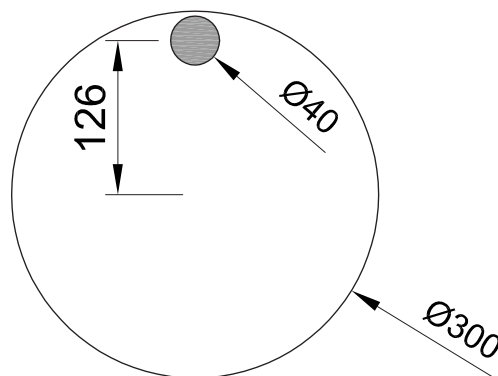


Figura 9.5: Domínio considerado (mm).

As malhas utilizadas no *phantom* numérico e caixa-preta são as mesmas utilizadas na parte 1B, assim como a evolução temporal do estado simula a mesma rampa.

9.3 Ensaio 2

O segundo ensaio realizado tem o objetivo de utilizar a matriz de transição obtida no ensaio 1 no FEK para estimação do estado. O ensaio também é subdividido em três partes, cada um utiliza os resultados obtidos nas três partes do ensaio 1:

9.3.1 Parte 2A

A parte 2A utiliza a matriz de transição calculada no ensaio 1A no FEK. A malha utilizada para resolver tanto o problema direto quanto o *phantom* pode ser vista na Fig. (9.1(b)). Portanto incorreu-se ao crime inverso nesta parte.

A evolução temporal que o FEK deve estimar considera o meio ao redor dos objetos com resistividade constante $\rho = 35.0\Omega m$ e objetos com resistividade modelada como um degrau em $k = 0$

$$\rho_k = \begin{cases} 35.0 & , \quad k < 0 \\ 50.0 & , \quad k \geq 1 \end{cases} \quad (\Omega m) \quad (9.3)$$

Note que o modelo utilizado no cálculo da matriz de transição e o modelo utilizado no FEK são diferentes. Isto é feito para se estudar o comportamento do filtro de Kalman quando ocorre erro de modelagem.

9.3.2 Parte 2B e 2C

As parte 2B e 2C utilizam aa matrizes de transição calculadas nos ensaios 1B e 1C respectivamente no FEK. A malha utilizada pode ser vista na Fig. (9.3(b)).

A evolução temporal que o FEK deve estimar considera o meio ao redor dos objetos com resistividade constante $\rho = 35.0\Omega m$ e objetos com resistividade modelada

como um degrau em $k = 0$

$$\rho_k = \begin{cases} 35.0 & , \quad k < 0 \\ 100.0 & , \quad k \geq 1 \end{cases} \quad (\Omega m) \quad (9.4)$$

9.4 Critério de desempenho

Para avaliar o desempenho no ensaio 1 determina-se o erro das estimativas, definido aqui como a diferença, em todos os instantes, entre o estado verdadeiro $\boldsymbol{\rho}_k^*$ e o estado estimado $\boldsymbol{\rho}_k$

$$\mathbf{e}_k = \boldsymbol{\rho}_k^* - \boldsymbol{\rho}_k. \quad (9.5)$$

Calcula-se, então, o erro médio $\bar{e}_k$ e o desvio padrão do erro médio σ_{e_k}

$$\bar{e}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{e^2} e_{ik} \quad (9.6)$$

$$\sigma_{e_k} = \sqrt{\frac{1}{e^2 - 1} \sum_{i=1}^{e^2} (e_{ik} - \bar{e}_k)^2} \quad (9.7)$$

Para avaliar o desempenho no ensaio 2 determina-se a média o resíduo das observações(4), dado por

$$\bar{r}_k = \left\{ \frac{1}{e^2} \sum_{i=1}^{e^2} [\mathbf{v}_k - \mathbf{H}_k \boldsymbol{\rho}_k^{(-)}]_i \right\}, \quad (9.8)$$

$$\sigma_{r_k} = \sqrt{\frac{1}{e^2 - 1} \sum_{i=1}^{e^2} ([\mathbf{v}_k - \mathbf{H}_k \boldsymbol{\rho}_k^{(-)}]_i - \bar{r}_k)^2}. \quad (9.9)$$

PARTE IV

RESULTADOS, DISCUSSÕES E
CONCLUSÕES

10 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nesta parte do texto, apresenta-se ao leitor os resultados obtidos nos ensaios, juntamente com as discussões cabíveis. O desenvolvimento desta parte seguiu o desenvolvimento cronológico do trabalho, isto é, são apresentados aqui os resultados e discussões conforme foram surgindo ao longo do desenvolvimento.

10.1 Ensaio 1

10.1.1 Parte 1A

Foram testadas três diferentes situações na parte 1A:

1. Sem ruído uniforme aditivo no estado;
2. Com ruído uniforme adicionado no estado - desvio padrão $\sigma = 0.865\Omega m$, média nula e amplitude $3.0\Omega m$ pico a pico;
3. Com ruído uniforme adicionado no estado - desvio padrão $\sigma = 1.73\Omega m$, média nula e amplitude $6.0\Omega m$ pico a pico.

As Fig. (10.1), Fig. (10.2) e Fig. (10.3) mostram os resultados das simulações para três diferentes valores de α usados na eq. (7.32) em cada uma das situações descritas acima¹. Os gráficos da coluna esquerda mostram o erro e_k de dois elementos característicos do domínio: um elemento que representa os elementos do meio e um elemento que

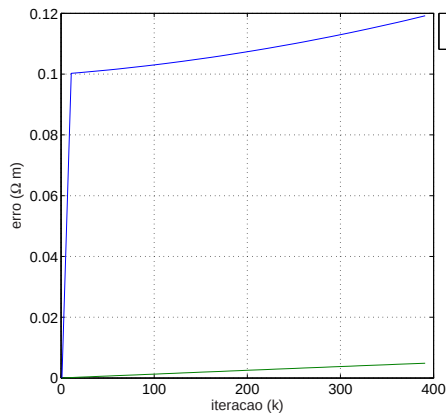
¹Para facilitar a leitura do texto, algumas das imagens resultantes dos ensaios são mostradas no final de cada seção deste capítulo.

representa os objetos. Os gráficos da coluna direita mostram a média (eq. (9.6)) e o desvio padrão do erro (eq. (9.7)) em cada instante ($\bar{e}_k \pm \sigma_{e_k}$).

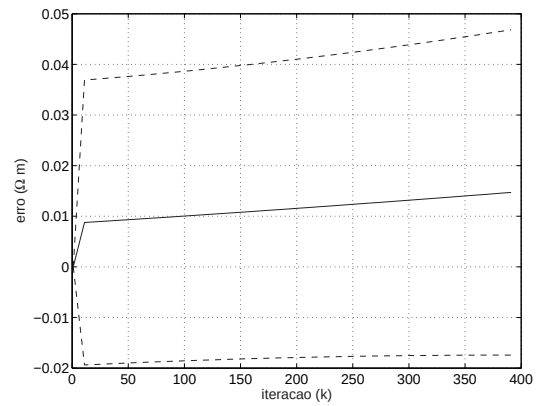
A evolução do estado foi feita conforme a eq. (7.28) utilizando o valor verdadeiro ρ_0^* como estado inicial. Nota-se que o erro médio e a incerteza aumentam conforme o modelo de evolução avança no tempo. Isto ocorre devido o acúmulo do erro de iteração para iteração. Devido a isto, conclui-se que o uso de um estado inicial diferente do verdadeiro acarreta a tendência de aumentar o erro entre o modelo de evolução e o estado verdadeiro.

Outro ponto a ser comentado é a instabilidade numérica presente nas situações onde foram adicionados ruídos quando $\alpha \leq 10^{-1}$. Tal instabilidade provocou, em algumas simulações, divergência na evolução do estado após poucas iterações. Tal instabilidade não foi verificada nos casos de $\alpha = 10^0$.

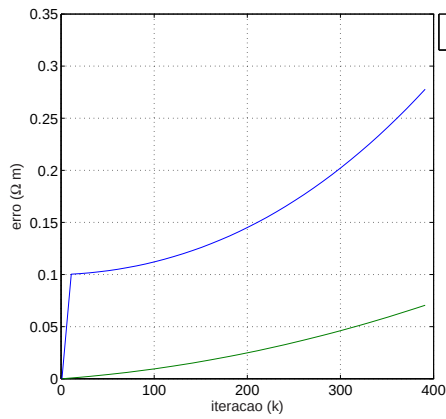
10.1.1.1 Situação 1: sem ruído aditivo no estado



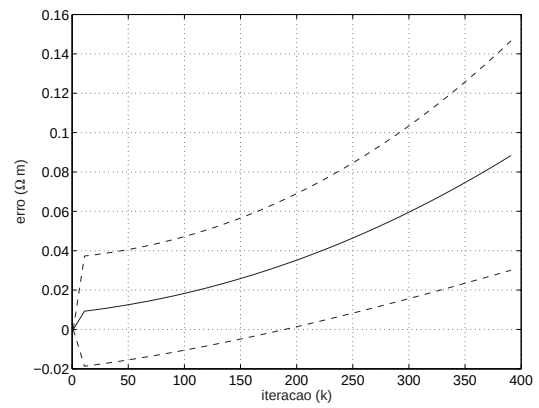
(a) Erro do estado ($\alpha = 10^0$).



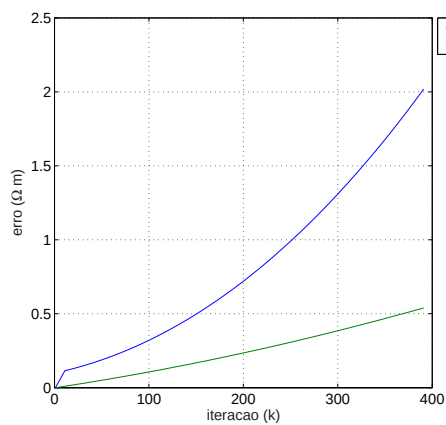
(b) Erro médio e desvio padrão ($\alpha = 10^0$).



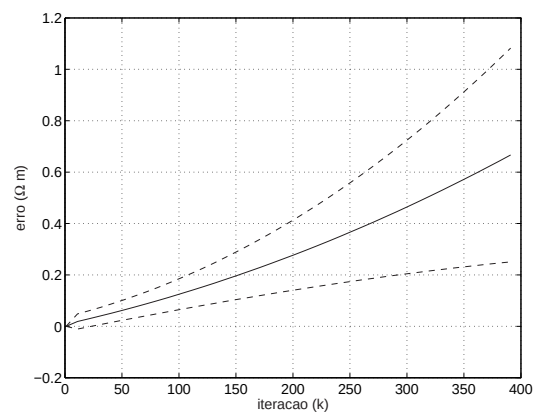
(c) Erro do estado ($\alpha = 10^{-1}$).



(d) Erro médio e desvio padrão ($\alpha = 10^{-1}$).



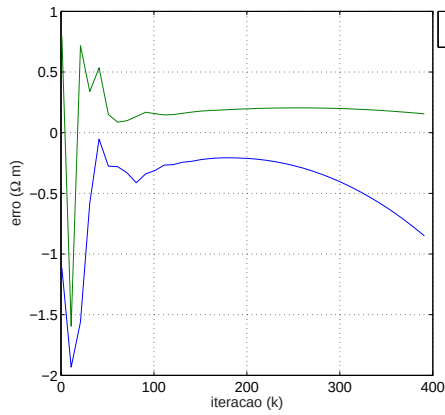
(e) Erro do estado ($\alpha = 10^{-2}$).



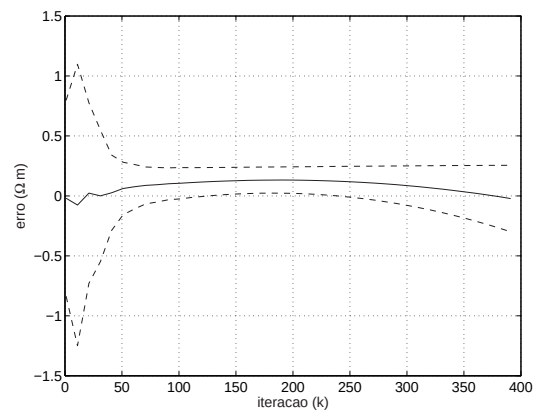
(f) Erro médio e desvio padrão ($\alpha = 10^{-2}$).

Figura 10.1: Parte 1A sem ruído aditivo.

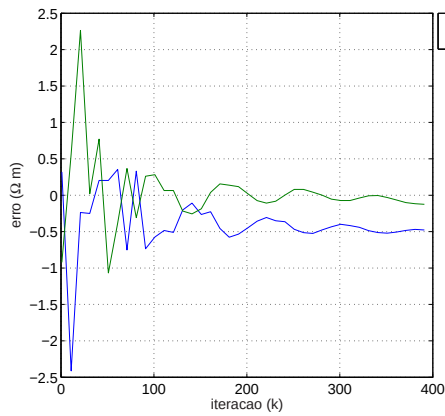
10.1.1.2 Situação 2: com ruído uniforme aditivo no estado $\sigma = 0.865\Omega m$



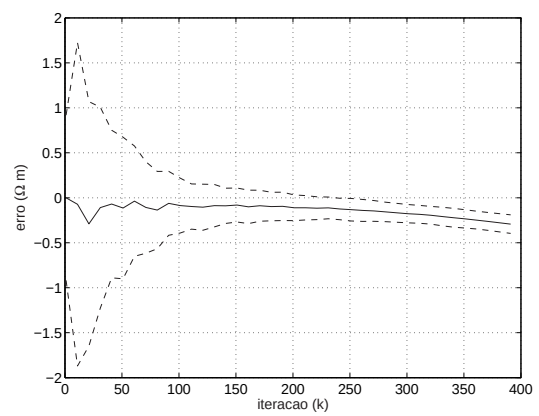
(a) Erro do estado ($\alpha = 10^0$).



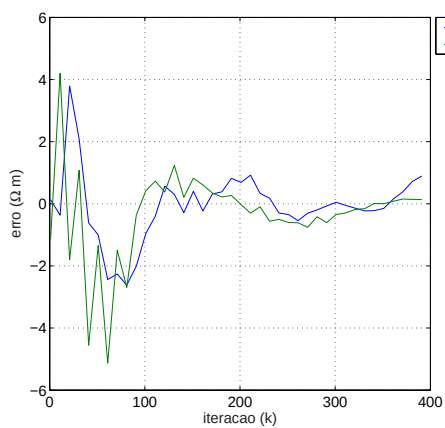
(b) Erro médio e desvio padrão ($\alpha = 10^0$).



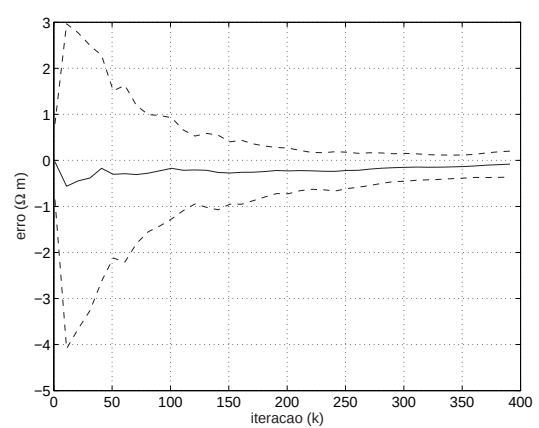
(c) Erro do estado ($\alpha = 10^{-1}$).



(d) Erro médio e desvio padrão ($\alpha = 10^{-1}$).



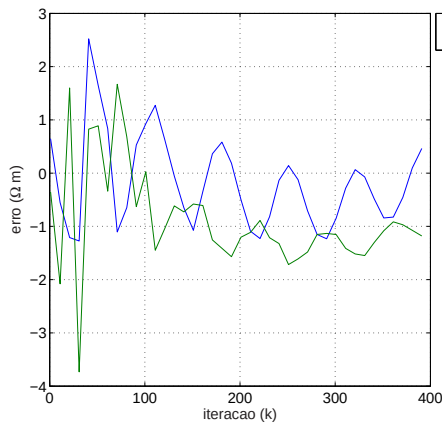
(e) Erro do estado ($\alpha = 10^{-2}$).



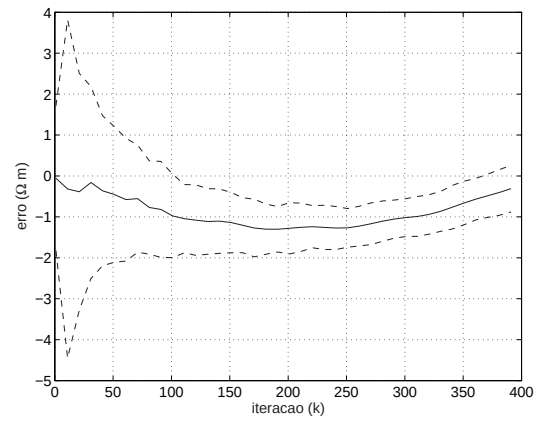
(f) Erro médio e desvio padrão ($\alpha = 10^{-2}$).

Figura 10.2: Parte 1A com ruído uniforme aditivo $\sigma = 0.865\Omega m$.

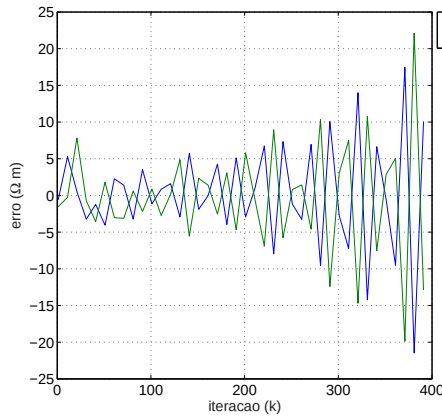
10.1.1.3 Situação 3: com ruído uniforme aditivo no estado $\sigma = 1.72\Omega m$



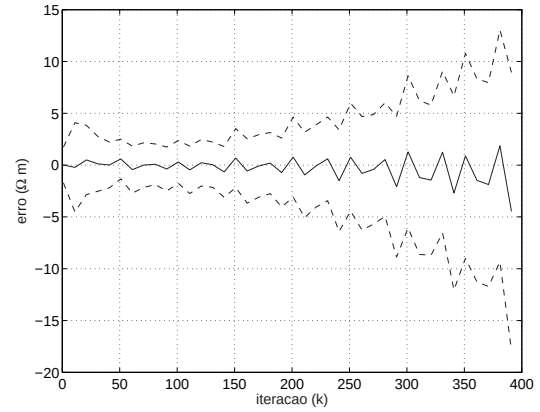
(a) Erro do estado ($\alpha = 10^0$).



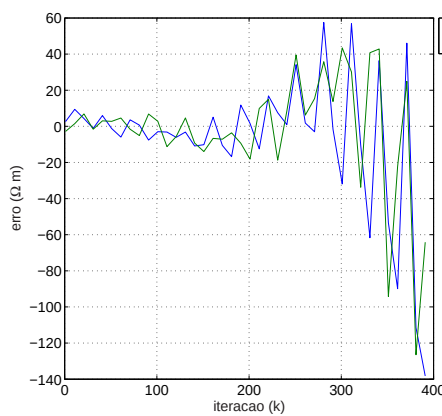
(b) Erro médio e desvio padrão ($\alpha = 10^0$).



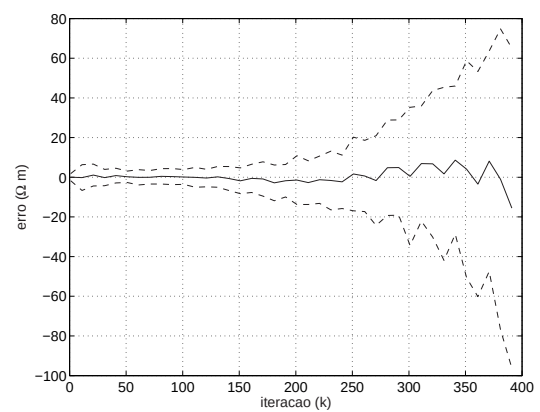
(c) Erro do estado ($\alpha = 10^{-1}$).



(d) Erro médio e desvio padrão ($\alpha = 10^{-1}$).



(e) Erro do estado ($\alpha = 10^{-2}$).



(f) Erro médio e desvio padrão ($\alpha = 10^{-2}$).

Figura 10.3: Parte 1A com ruído uniforme aditivo $\sigma = 1.72\Omega m$.

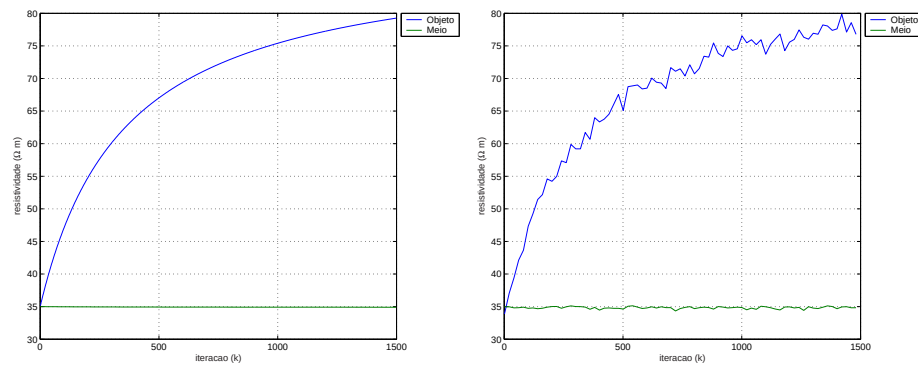
10.1.2 Parte 1B

Foram ensaiadas duas diferentes situações na parte 1B:

1. Sem ruído uniforme aditivo nas tensões obtidas pelo *phantom* numérico;
2. Com ruído uniforme aditivo nas tensões obtidas pelo *phantom* numérico - média nula, desvio padrão $\sigma = 2.8 * 10^{-5}V$ e amplitude $1.0 * 10^{-4}V$ pico a pico. Este valor de ruído utilizado na segunda situação foi escolhido a partir do nível de ruído presente nas medidas feitas pelo equipamento de TIE.

Os parâmetros utilizados no caixa-preta foram: $\rho^0 = 35\Omega m$, $\rho_{eletr} = 0.02\Omega m^2$, $\alpha = 10^{-4}$, desvio padrão do filtro gaussiano $\sigma = 2cm$, $\beta = 10^{-6}$, $p = 2$, $\delta\rho_i = 50\%$, corrente injetada por padrão de corrente $I = 2mA$ pico a pico.

A Fig. (10.4) mostra a evolução do estado estimado pelo algoritmo caixa-preta nas duas situações acima descritas para um elemento que representa o objeto e o meio. Nota-se a pequena inclinação da curva que descreve a resistividade do objeto estimada pelo algoritmo e, além disto, um comportamento não linear. A Fig. (10.5) mostra imagens obtidas pelo caixa-preta em três instantes diferentes, sem ruído (coluna da esquerda) e com ruído (coluna da direita). Nestas imagens mostra-se também o posicionamento verdadeiro do objeto.



(a) Sem ruído aditivo.

(b) Com ruído aditivo.

Figura 10.4: Evolução temporal do estado estimado pelo caixa-preta.

As imagens obtidas pelo caixa-preta (Fig. (10.5)) apresentam valores da resistividade do objeto muito menor que o valor verdadeiro. Entre as causas para isto, pode-se citar:

- O uso da hipótese de que dentro de um elemento finito, a resistividade é uniforme. O valor obtido pelo uso do MEF é aproximadamente a média do valor da resistividade desta região. Como os elementos que ocupam o espaço do objeto possuem área maior que o objeto, há uma ponderação entre o valor da resistividade do meio e do objeto
- As medidas de tensões apresentam pequena sensibilidade para alterações na resistividade da região central de Γ .

As Fig. (10.6) e Fig. (10.7) mostram os resultados das simulações para três diferentes valores de α usados na eq. (7.32) em cada uma das situações descritas acima. Neste caso, o estado verdadeiro ρ_0^* é considerado aquele obtido no algoritmo caixa-preta, isto é, o estado estimado pelo uso do problema inverso, sem a adição de ruído.

A evolução do estado foi feita conforme a eq. (7.28) utilizando o valor verdadeiro ρ_0^* como estado inicial. Os resultados obtidos na simulação da primeira situação (Fig. (9.3)) mostram novamente a instabilidade numérica quando $\alpha = 10^{-2}$.

Os resultados obtidos na simulação da segunda situação (Fig. (10.7)) mostram um comportamento parecido usando vários valores para α , isto aponta para um melhor condicionamento na eq. (7.32) devido ao nível de ruído adicionado. Este melhor condicionamento pode ser explicado pela perturbação aleatória nas colunas linearmente dependentes². Este resultado também foi observado em outras simulações não apresentadas neste trabalho.

²Mesmo que as colunas não sejam linearmente dependentes, devido ao cálculo em ponto flutuante de precisão finita tais colunas podem ser linearmente dependentes numericamente falando.

10.1.2.1 Resultados do caixa-preta

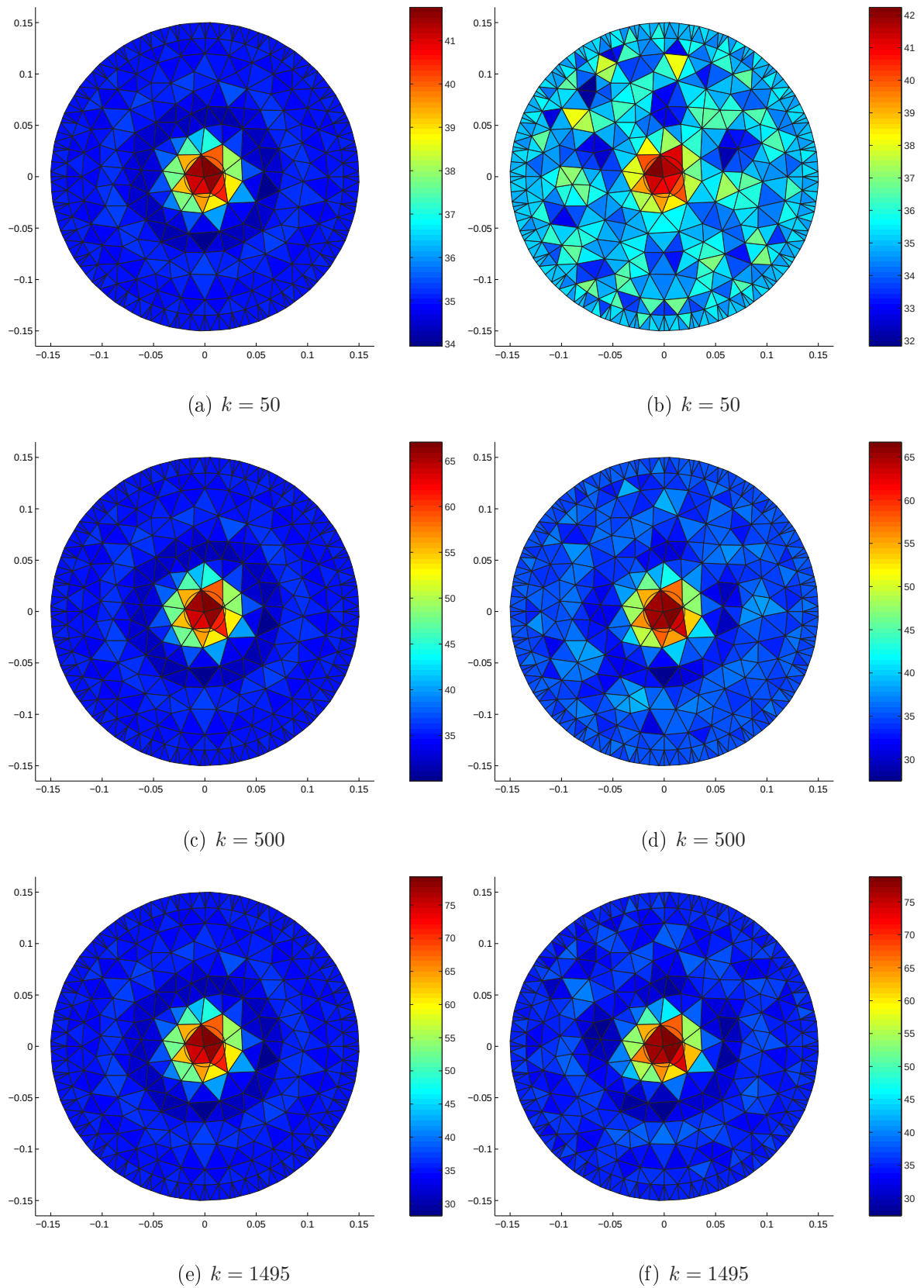
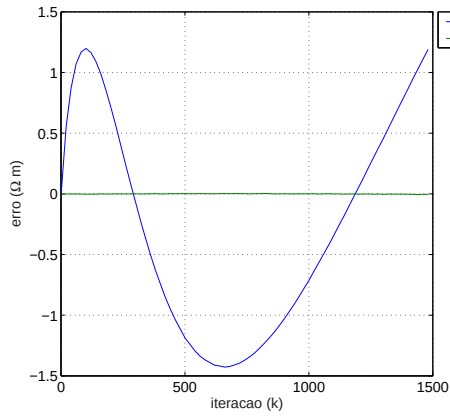
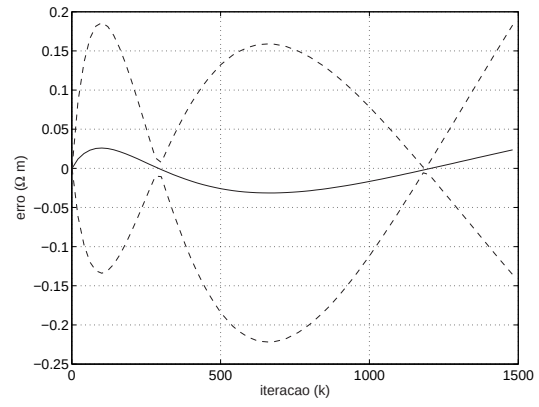


Figura 10.5: Imagens obtida pelo caixa-preta (Ωm).

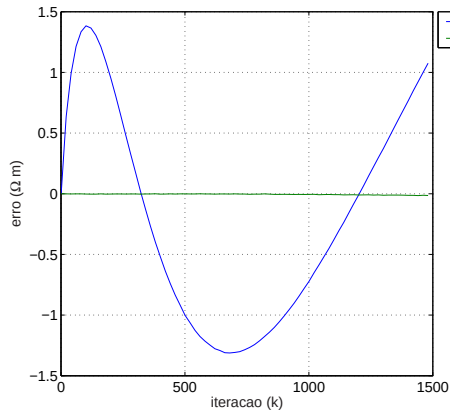
10.1.2.2 Situação 1: sem ruído uniforme aditivo nas tensões



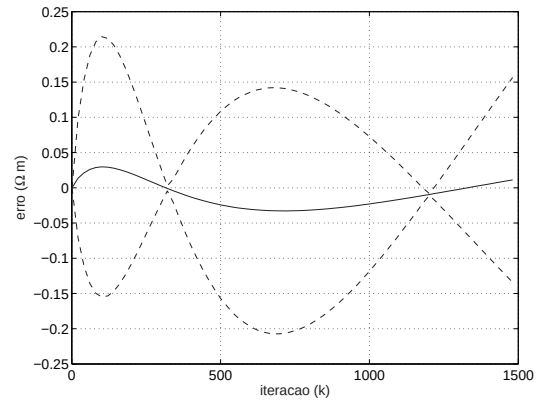
(a) Erro do estado ($\alpha = 10^0$).



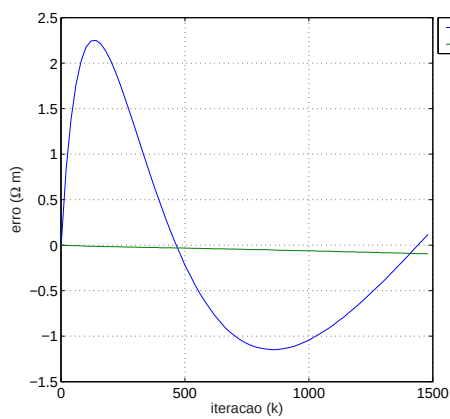
(b) Erro médio e desvio padrão ($\alpha = 10^0$).



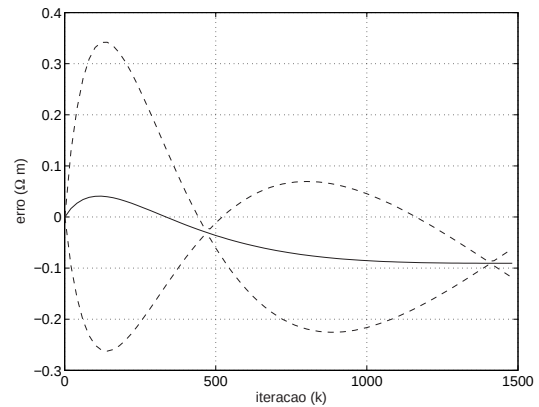
(c) Erro do estado ($\alpha = 10^{-1}$).



(d) Erro médio e desvio padrão ($\alpha = 10^{-1}$).



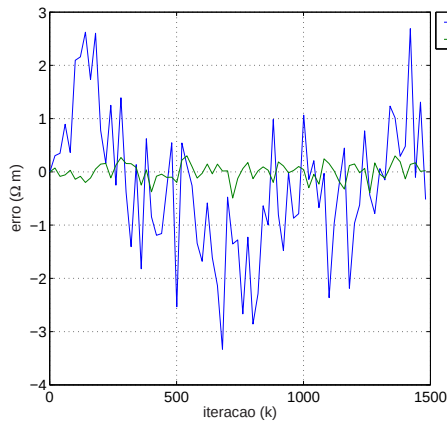
(e) Erro do estado ($\alpha = 10^{-2}$).



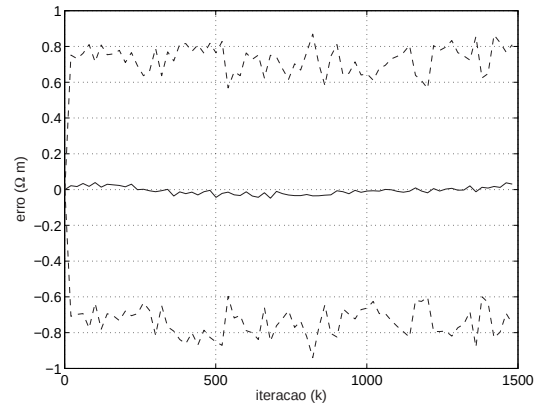
(f) Erro médio e desvio padrão ($\alpha = 10^{-2}$).

Figura 10.6: Parte 1B sem ruído uniforme aditivo.

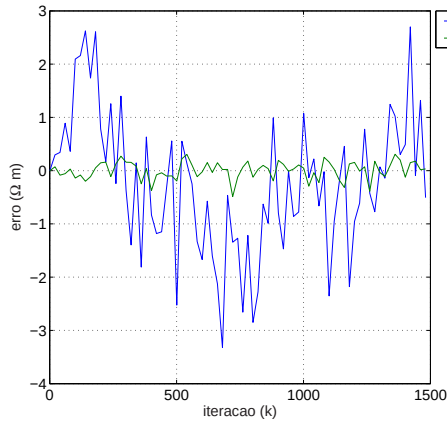
10.1.2.3 Situação 2: com ruído uniforme aditivo nas tensões



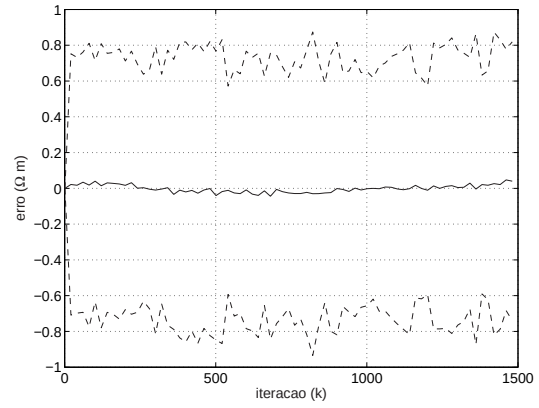
(a) Erro do estado ($\alpha = 10^0$).



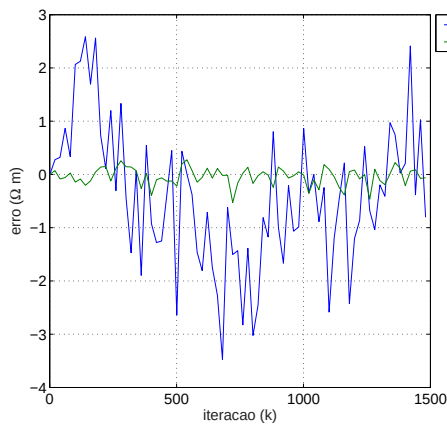
(b) Erro médio e desvio padrão ($\alpha = 10^0$).



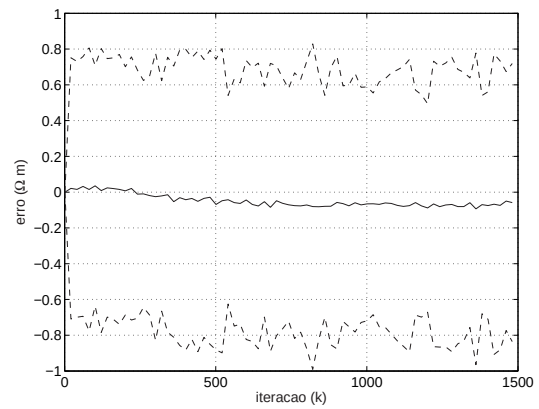
(c) Erro do estado ($\alpha = 10^{-1}$).



(d) Erro médio e desvio padrão ($\alpha = 10^{-1}$).



(e) Erro do estado ($\alpha = 10^{-2}$).



(f) Erro médio e desvio padrão ($\alpha = 10^{-2}$).

Figura 10.7: Parte 1B com ruído uniforme aditivo.

10.1.3 Parte 1C

Foram ensaiadas as mesmas situações usadas na parte 1C:

1. Sem ruído uniforme aditivo nas tensões obtidas no *phantom* numérico;
2. Com ruído uniforme aditivo nas tensões obtidas no *phantom* numérico - desvio padrão $\sigma = 2.8 * 10^{-5}V$, média nula e amplitude $1.0 * 10^{-4}V$ pico a pico.

Os parâmetros utilizados no caixa-preta foram: $\rho^0 = 35\Omega m$, $\rho_{eletr} = 0.02\Omega m^2$, $\alpha = 10^{-4}$, desvio padrão do filtro gaussiano $\sigma = 2cm$, $\beta = 10^{-6}$, $p = 2$, $\delta\rho_i = 50\%$, corrente injetada por padrão de corrente $I = 2mA$ pico a pico.

A Fig. (10.8) mostra a evolução do estado estimado pelo algoritmo caixa-preta nas duas situações acima descritas. Comparando com a Fig. (10.4), nota-se que estas estimativas possuem maiores valores, devidos a proximidade do objeto com $\partial\Gamma$. Ainda assim, estas estimativas apresentam valores muito menores que os reais. A Fig. (10.9) mostra imagens obtidas pelo caixa-preta em três instantes diferentes, sem ruído (coluna da esquerda) e com ruído (coluna da direita). Nestas imagens mostra-se também o posicionamento verdadeiro do objeto.

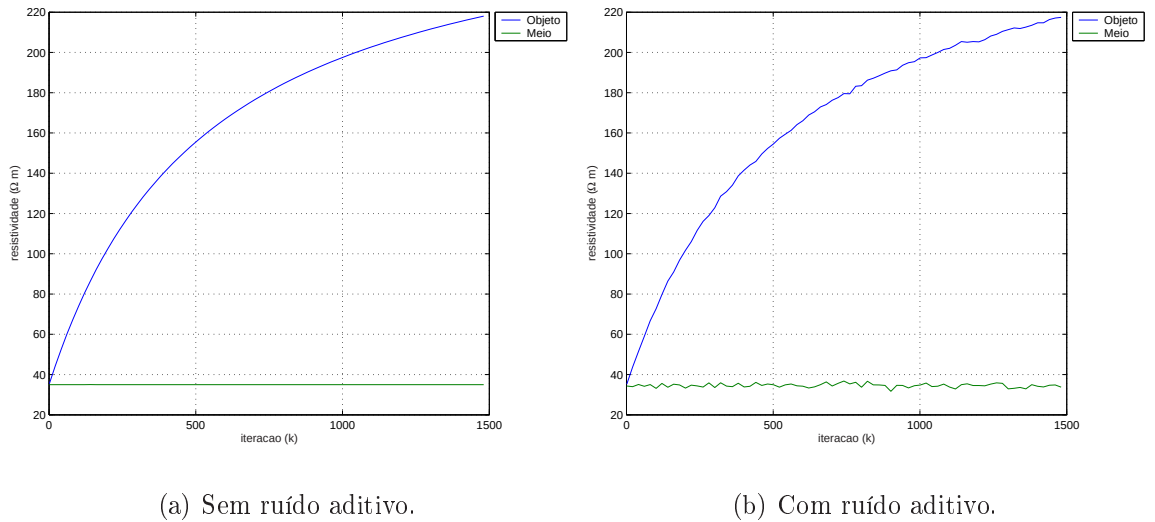


Figura 10.8: Evolução temporal do estado estimado pelo caixa-preta.

Comparando as imagens entre a parte 1B e 1C, nota-se que os valores de resistividade do objeto são maiores no caso 1C. Apesar disto, devido à discretização grosseira na região da periferia, o objeto ficou menos definido na parte 1C.

As próximas figuras mostram os resultados das simulações para três diferentes valores de α usados na eq. (7.32) em cada uma das situações descritas acima.

A evolução do estado foi feita conforme a eq. (7.28) utilizando o valor verdadeiro ρ_0^* como estado inicial. Os resultados obtidos nas partes 1C e 1B mostram que não há diferenças significativas entre os erros médios quando o objeto está no centro ou na periferia de Γ utilizando dados de tensões com ruído iguais ao existente no circuito eletrônico de aquisição de dados.

10.1.3.1 Resultados do caixa-preta

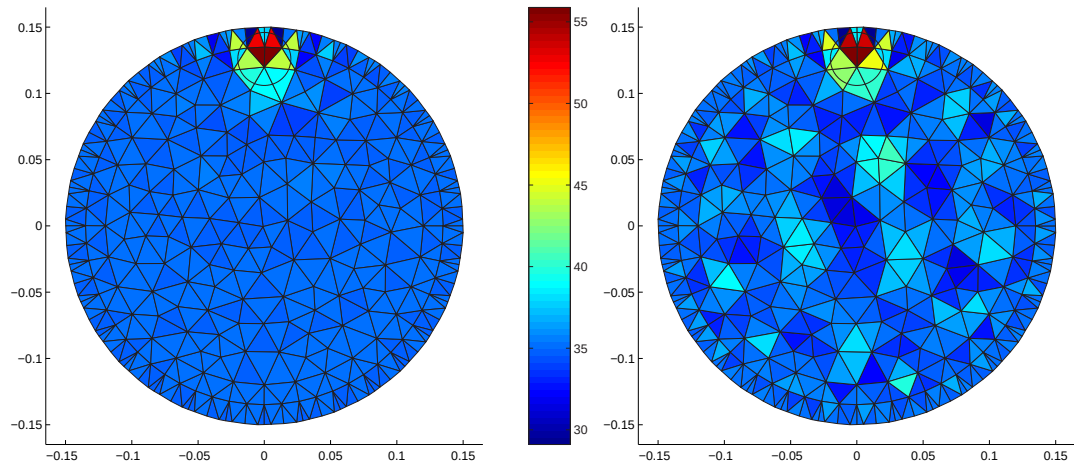
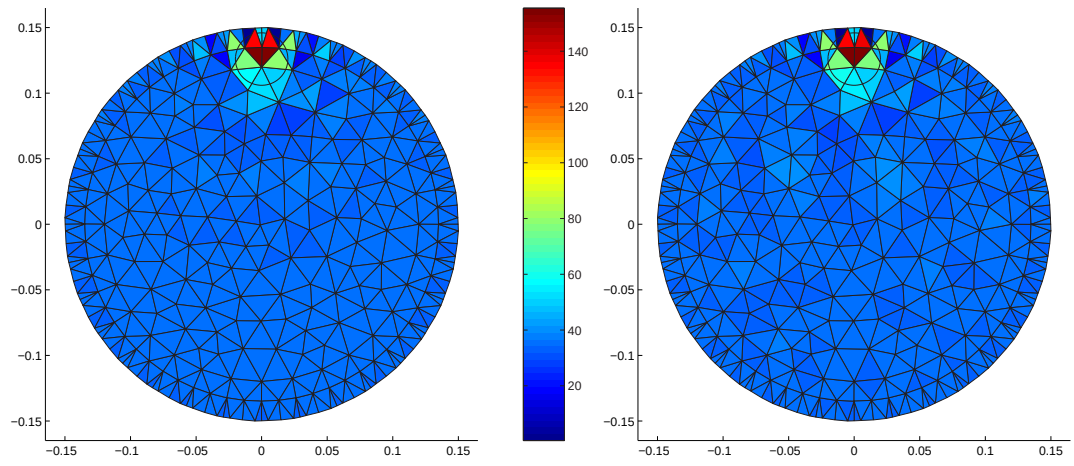
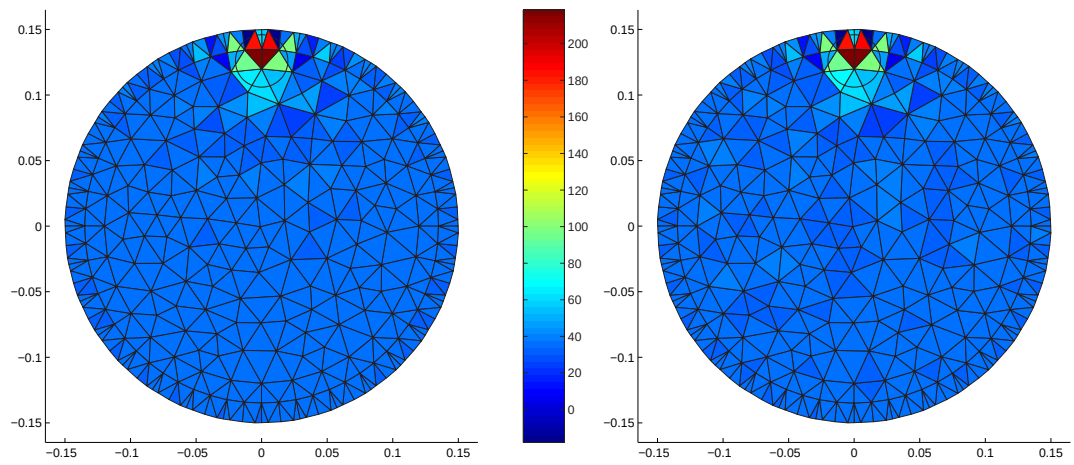
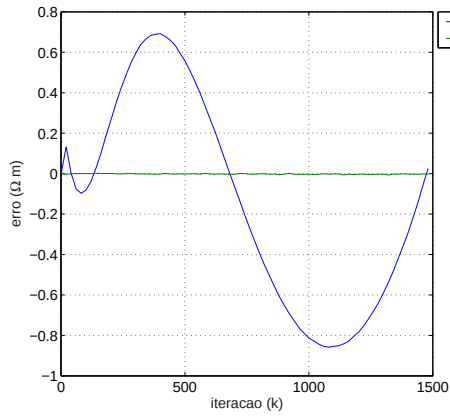
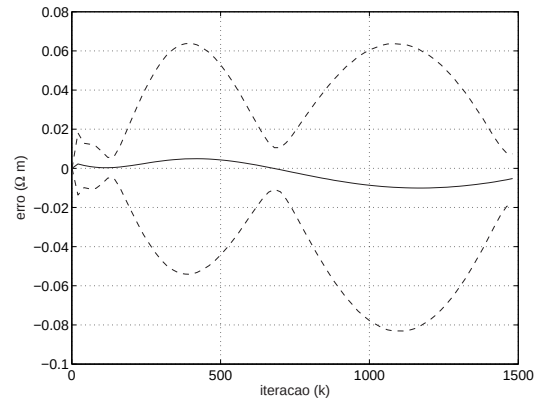
(a) $k = 50$ (b) $k = 50$ (c) $k = 500$ (d) $k = 500$ (e) $k = 1495$ (f) $k = 1495$

Figura 10.9: Imagens obtida pelo caixa-preta (Ωm).

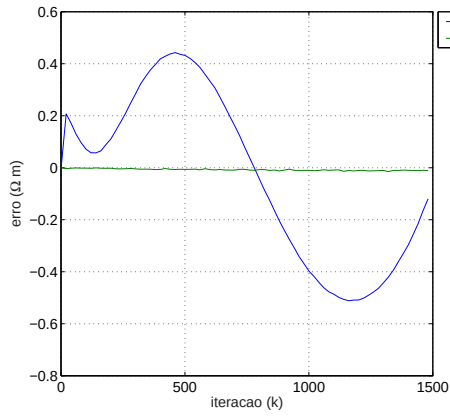
10.1.3.2 Situação 1: sem ruído aditivo nas tensões



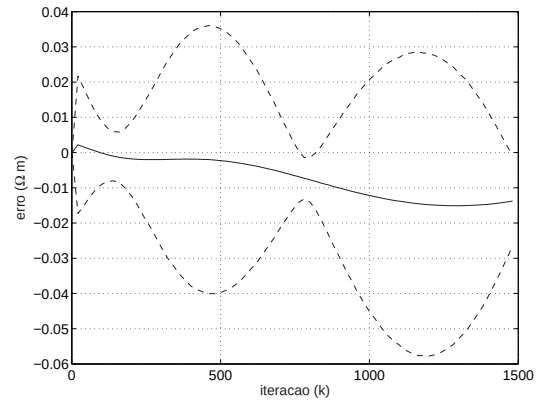
(a) Erro do estado ($\alpha = 10^0$).



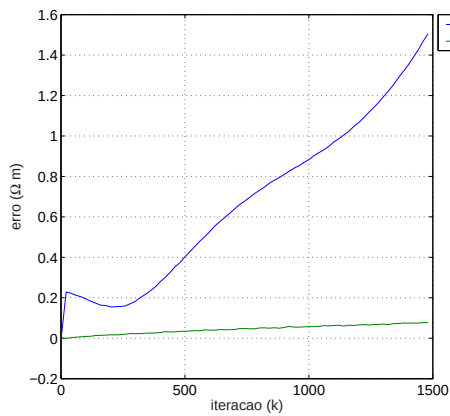
(b) Erro médio e desvio padrão ($\alpha = 10^0$).



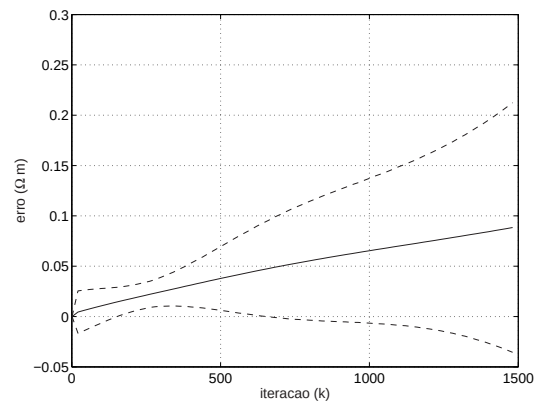
(c) Erro do estado ($\alpha = 10^{-1}$).



(d) Erro médio e desvio padrão ($\alpha = 10^{-1}$).



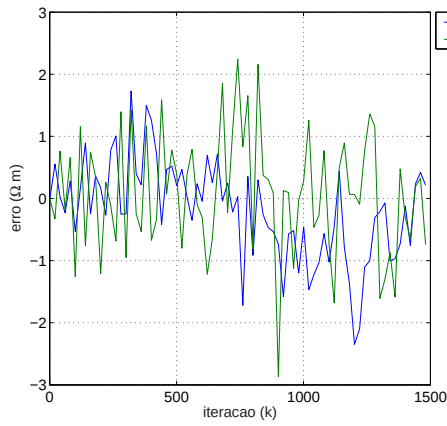
(e) Erro do estado ($\alpha = 10^{-2}$).



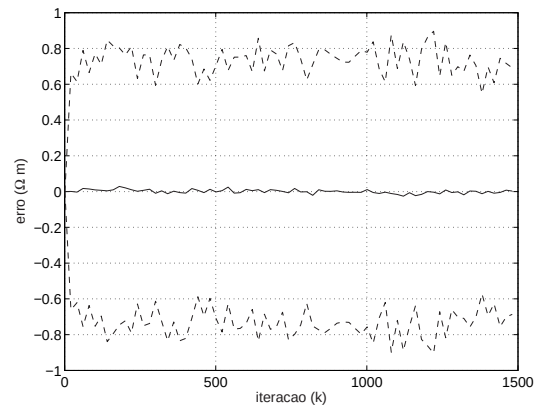
(f) Erro médio e desvio padrão ($\alpha = 10^{-2}$).

Figura 10.10: Parte 1C sem ruído aditivo.

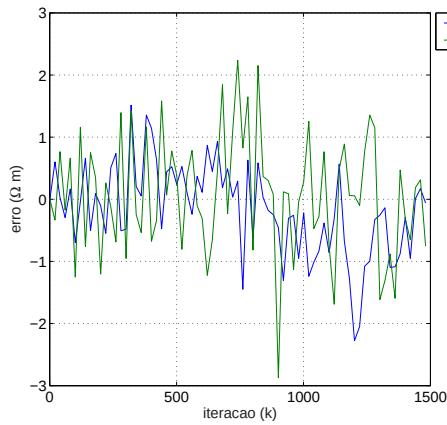
10.1.3.3 Situação 2: com ruído uniforme aditivo nas tensões



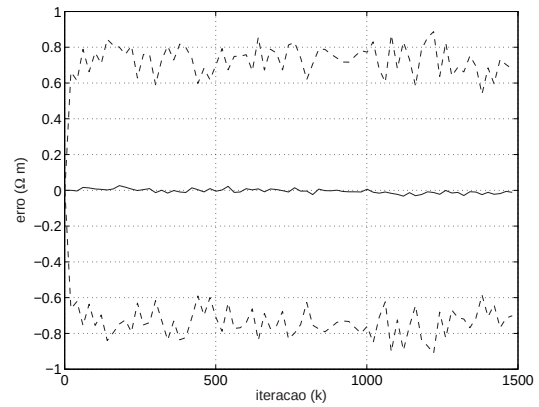
(a) Erro do estado ($\alpha = 10^0$).



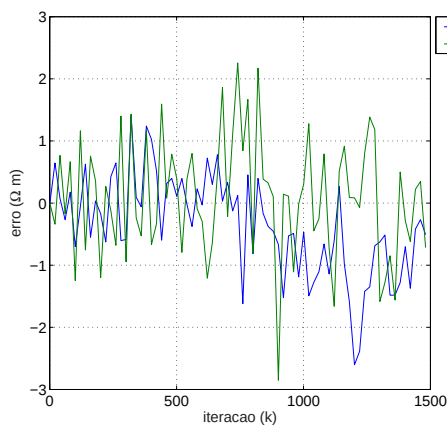
(b) Erro médio e desvio padrão ($\alpha = 10^0$).



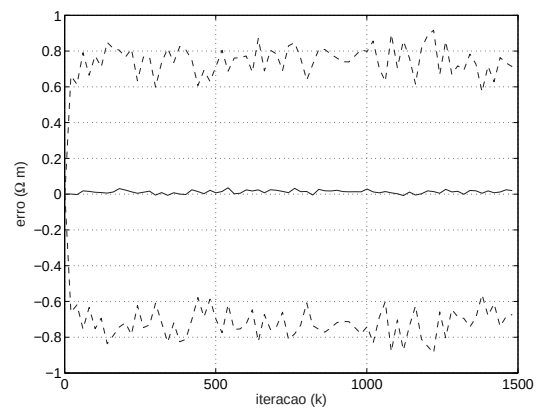
(c) Erro do estado ($\alpha = 10^{-1}$).



(d) Erro médio e desvio padrão ($\alpha = 10^{-1}$).



(e) Erro do estado ($\alpha = 10^{-2}$).



(f) Erro médio e desvio padrão ($\alpha = 10^{-2}$).

Figura 10.11: Parte 1C com ruído uniforme aditivo.

10.1.4 Influência da Regularização de Tikhonov

Cabe aqui uma análise dos efeitos da regularização de Tikhonov sobre a matriz de transição resultante da eq. (7.32).

A matriz de transição do sistema discreto no tempo proporciona um comportamento estável para a evolução do estado caso seus auto-valores (em geral complexos) possuam norma euclidiana menores que a unidade, ou seja, graficados no plano complexo (diagrama Nyquist), devem permanecer dentro de uma circunferência de raio unitário, centrado na origem. Quanto mais próximos estes auto-valores estiverem da origem, maiores serão os amortecimentos do sistema. Isto pode ser visto através da relação entre a transformada z e s

$$z = e^{sT} = e^{(a+bi)T} = e^{aT} e^{biT}. \quad (10.1)$$

O expoente do termo à direita é puramente complexo, representando o comportamento senoidal de um dos modos do sistema. Já o expoente do termo à esquerda é puramente real, representando o crescimento ou decrescimento da amplitude do modo.

Para que o sistema seja estável, a deve ser negativo. Quanto mais negativo for este expoente, mais rápido o modo é amortecido e menor será o módulo do auto-valor z .

Na Fig. (10.12) estão graficados os auto-valores da matriz de transição para diferentes valores do parâmetro α no ensaio 1B (coluna da esquerda) e 1C (coluna da direita):

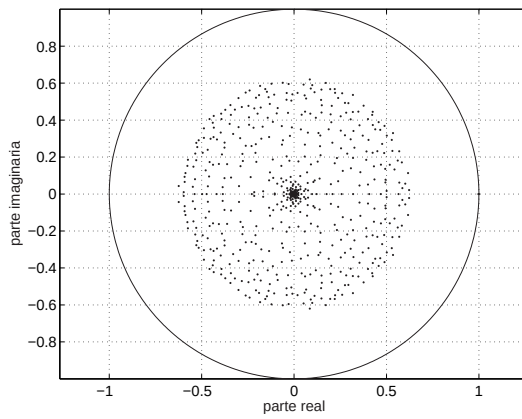
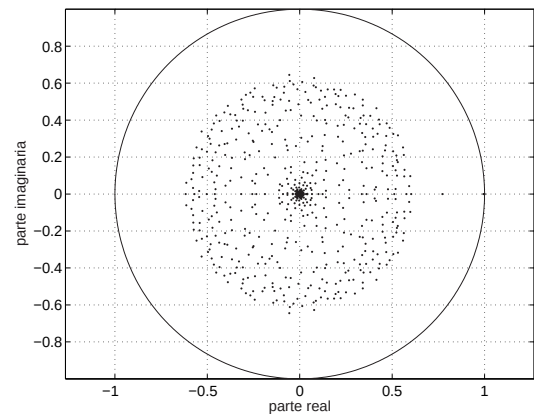
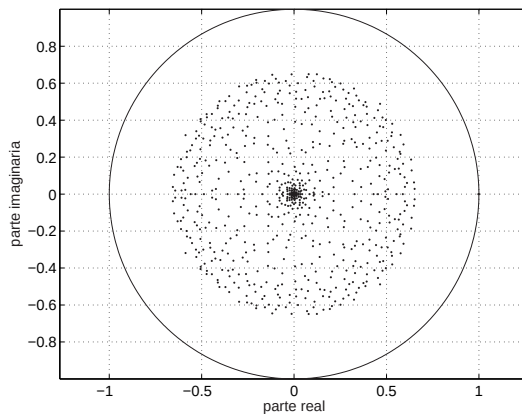
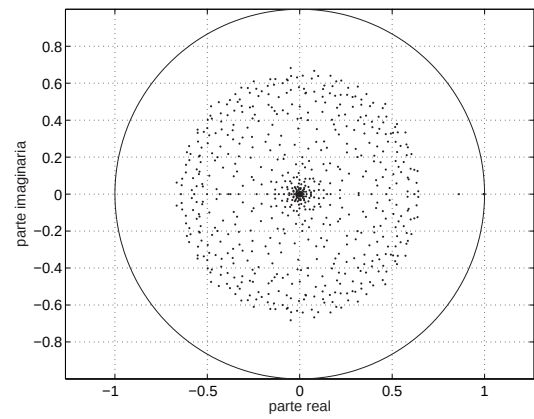
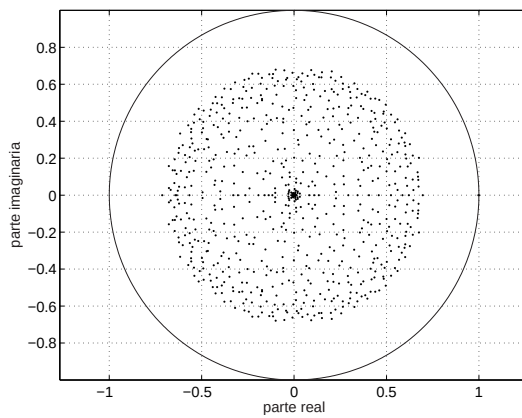
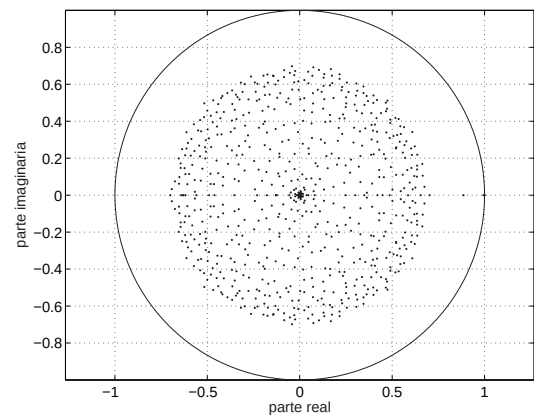
(a) Ensaio 1B, $\alpha = 10^0$.(b) Ensaio 1C, $\alpha = 10^0$.(c) Ensaio 1B, $\alpha = 10^{-1}$.(d) Ensaio 1C, $\alpha = 10^{-1}$.(e) Ensaio 1B, $\alpha = 10^{-2}$.(f) Ensaio 1C, $\alpha = 10^{-2}$.

Figura 10.12: Diagrama de Nyquist dos auto-valores de Φ nas partes 1B e 1C com ruído uniforme aditivo nas tensões.

Duas observações podem ser feitas a respeito destes gráficos:

Em primeiro lugar, o aumento de α causa uma diminuição do módulo dos auto-valores. Isto pode ser visto pela aproximação média dos auto-valores em relação à origem do plano complexo conforme α aumenta. Isto implica que a regularização tem a tendência de impor um amortecimento artificial nos modos do sistema. Conclui-se então que sistemas oscilatórios não forçados são prejudicados pela regularização de Tikhonov uma vez que este amortecimento artificial pode levar o sistema ao "repouso" em um estado intermediário.

Para comprovar esta afirmação simulou-se a evolução de um sistema puramente senoidal (sem amortecimento) e estimou-se sua matriz de transição nos mesmos moldes do ensaio 1C. O comportamento simulado representa um objeto na mesma posição do ensaio 1C, porém com evolução temporal considerando o meio ao redor dos objetos com resistividade constante $\rho = 35.0\Omega m$, eletrodos com parâmetro de eletrodo constante $\rho = 0.02\Omega m^2$ e objeto com resistividade modelada como uma senóide de equação

$$\rho_{(k)} = 85 + 50 \sin\left(\frac{2\pi k}{50} - \frac{\pi}{2}\right)\Omega m.$$

Foram utilizados os mesmos parâmetros do ensaio 1C e com o mesmo nível de ruído uniforme aditivo nas medidas de tensão obtidas no *phantom* numérico: desvio padrão $\sigma = 2.8 * 10^{-5}V$, média nula e amplitude $1.0 * 10^{-4}V$ pico a pico.

Na Fig. (10.13) estão o diagrama de Nyquist e a evolução temporal de um dos elementos que representam o objeto. No gráfico da direita, a linha cheia representa a evolução do estado através da matriz de transição, já a linha tracejada representa a evolução verdadeira do estado. Nota-se o grande amortecimento na evolução do estado conforme comentado anteriormente.

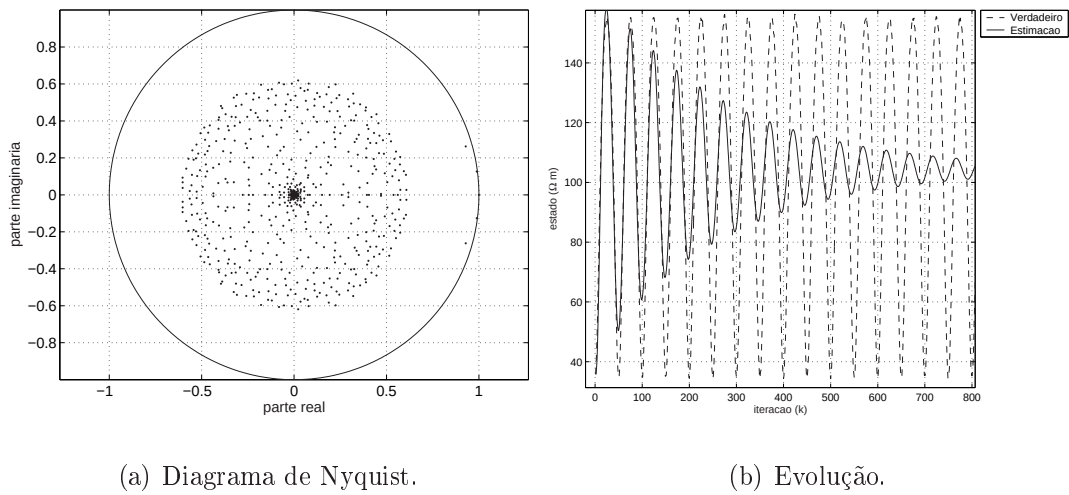
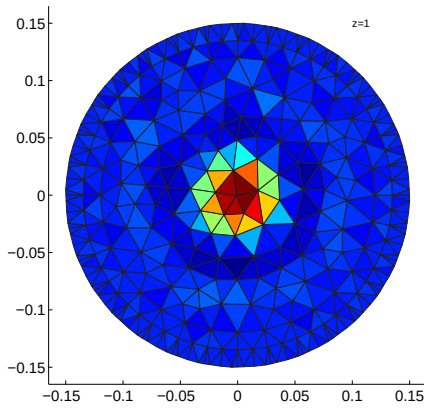
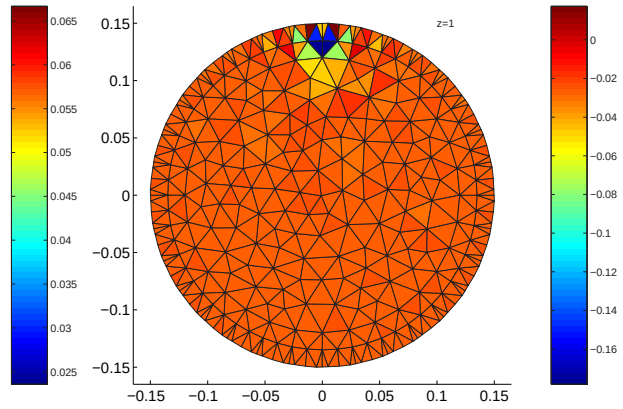


Figura 10.13: Diagrama de Nyquist e evolução temporal do estado ($\alpha = 10^0$).

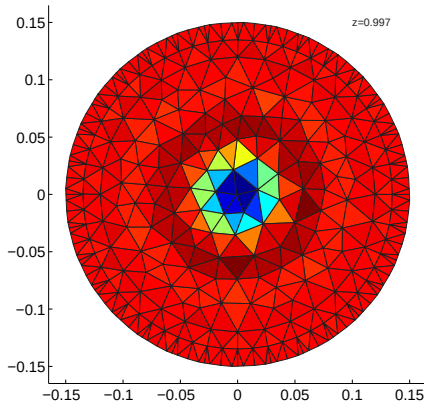
Em segundo lugar, os modos dominantes do sistema podem ser vistos na região interna do círculo, próximos do ponto $(1,0)$ (Fig. (10.12)). Estes modos apresentam amortecimento muito menores que os demais. São graficados nas As Fig. (10.14) e Fig. (10.15) os auto-vetores associados aos modos menos amortecidos do sistema. Salienta-se que qualquer modo que apresenta auto-valor z com módulo menor que 1 é amortecido e, portanto, desaparece da solução do sistema conforme o sistema avança no tempo.



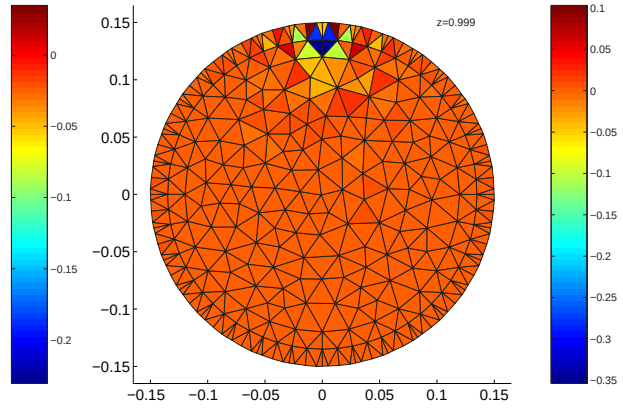
(a) Modo1, ensaio 1B.



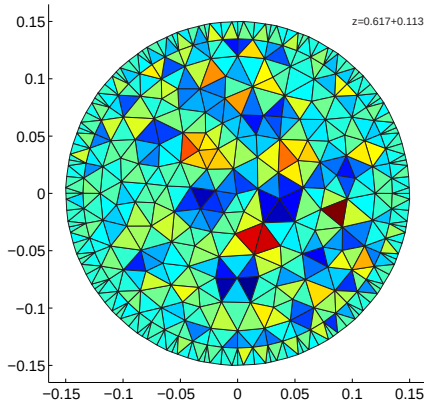
(b) Modo1, ensaio 1C.



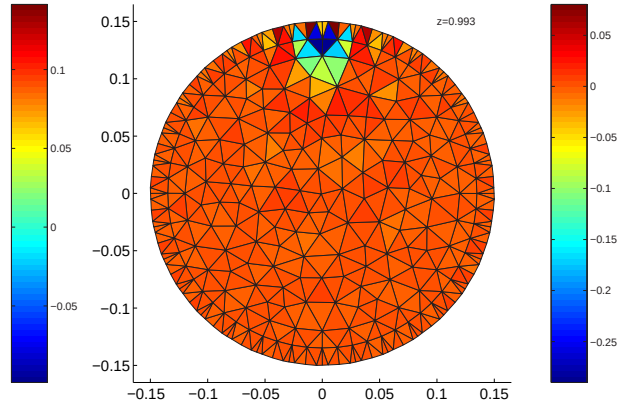
(c) Modo2, ensaio 1B.



(d) Modo2, ensaio 1C.



(e) Modo3, ensaio 1B.



(f) Modo3, ensaio 1C.

Figura 10.14: Modos dominantes da matriz Φ nas partes 1B e 1C com ruído aditivo nas tensões ($\alpha = 10^0$).

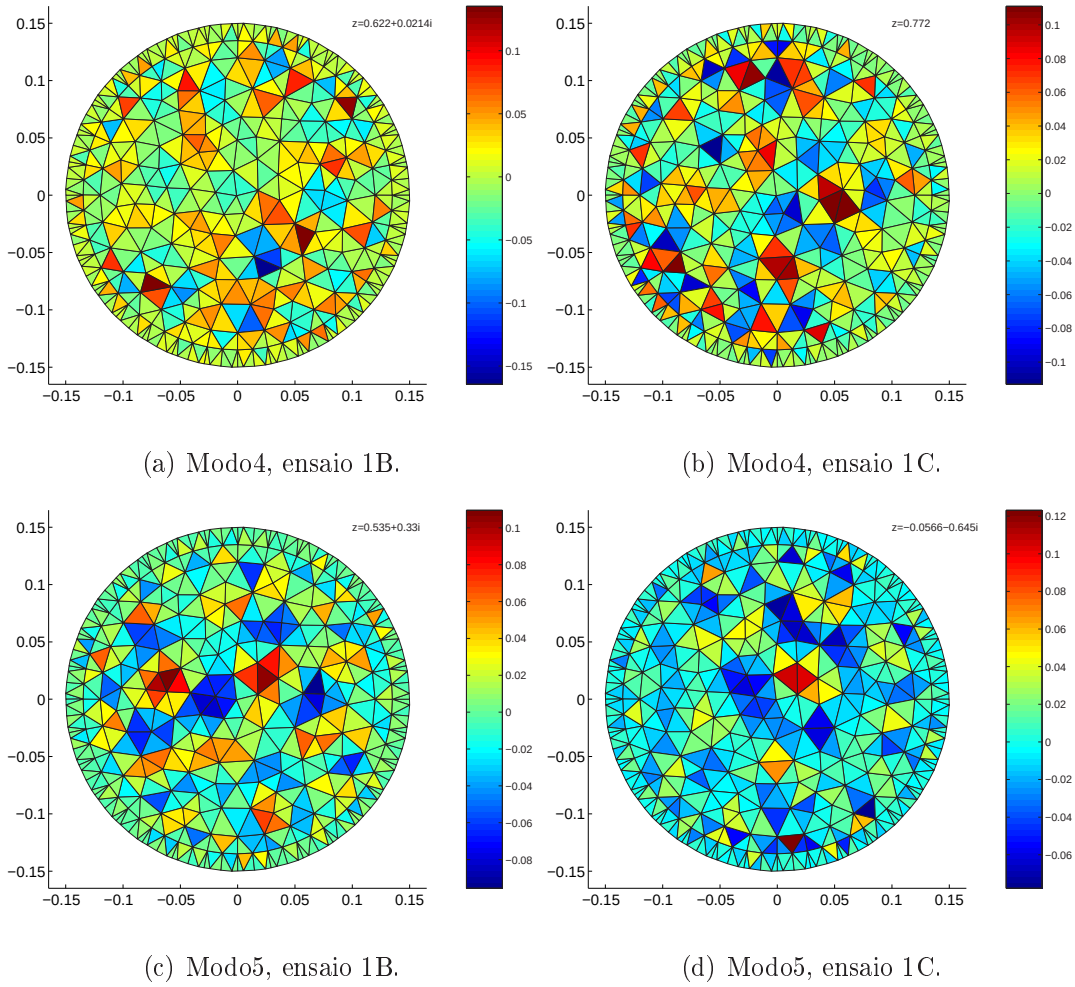


Figura 10.15: Modos dominantes da matriz Φ nas partes 1B e 1C com ruído aditivo nas tensões ($\alpha = 10^0$).

Nota-se pelos gráficos anteriores que os auto-vetores com auto-valores com maiores módulos (menores amortecimentos) representam a localização correta do objeto, especialmente os modos com módulo unitário, que não apresentam amortecimento³. Por último, nota-se que a adição de amortecimento nos modos do sistema apresenta pouca influência nos modos dominantes, especialmente nos modos com auto-vetores de módulo unitário.

Para estimar o número de modos com informação sobre objeto, pode-se utilizar o *Modal Assurance Criterion* (MAC) (9). Matematicamente, o MAC representa o cosseno

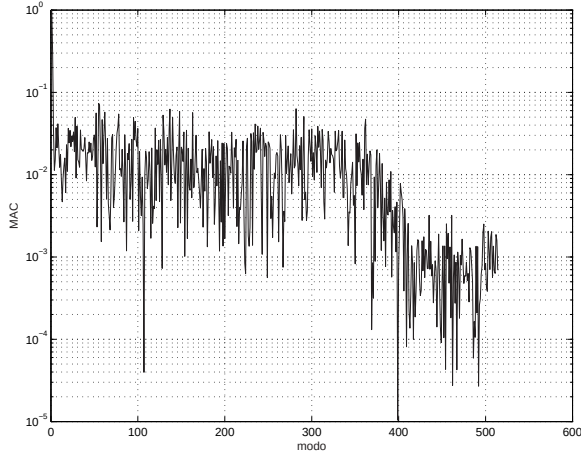
³Ainda assim estes modos podem apresentar amortecimento caso ocorra erro numérico suficiente na álgebra de ponto flutuante.

diretor entre dois vetores, quanto mais próximo da unidade é o produto escalar entre dois versores, mais paralelos são entre si. Como os auto-vetores podem ser opostos, a norma do cosseno diretor é usada.

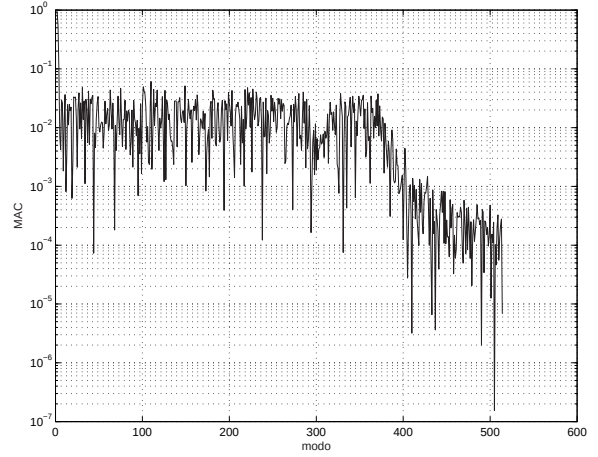
Para determinar quais modos apresentam similaridade com a imagem, pode-se calcular o MAC entre a imagem verdadeira e os modos do sistema, porém neste trabalho, o MAC é calculado entre o auto-vetor do primeiro modo e todos os outros, pois o primeiro apresenta boa relação com a posição do objeto. O MAC neste trabalho é definido por

$$MAC(j) = \left\| \frac{\bar{\rho}_1}{\|\bar{\rho}_1\|} \cdot \frac{\bar{\rho}_j}{\|\bar{\rho}_j\|} \right\| \quad j = 1, \dots, n \quad (10.2)$$

A Fig. (10.16) mostra o MAC da matriz de transição, com $\alpha = 10^0$ no ensaio 1B e 1C:



(a) Ensaio 1B.



(b) Ensaio 1C.

Figura 10.16: MAC dos auto-vetores nos ensaios 1B e 1C com $\alpha = 10^0$

Nota-se pouca relação entre o primeiro modo e os demais modos da matriz de transição. De fato, no ensaio 1B apenas um modo apresenta MAC maior que 0.5, enquanto que no ensaio 1C, apenas dois modos apresentam MAC maior que 0.5.

10.1.5 Conclusões do ensaio 1

Enumeram-se as conclusões obtidas por este ensaio

1. O erro médio e a incerteza aumentam conforme o modelo de evolução avança no tempo;
2. O uso de um estado inicial diferente do verdadeiro causa o aumento do erro;
3. O ruído uniforme aditivo no estado usado não foi suficiente para evitar problemas de condicionamento da eq. (7.32). Pequenos⁴ valores de α não evitam problemas de rápida divergência;
4. O algoritmo caixa-preta consegue identificar o objeto, mas não consegue obter o valor correto de resistividade;
5. O ruído uniforme aditivo nas tensões utilizando o caixa-preta melhorou o condicionamento da eq. (7.32);
6. A posição do objeto não tem influência no erro médio do estado quando existe ruído uniforme aditivo de tensões;
7. Nos demais ensaios utilizar-se-á o valor de $\alpha = 10^0$ para o cálculo das matrizes de transição;
8. O uso da regularização de Tikhonov adiciona amortecimento na evolução do estado utilizando a matriz de transição;
9. o MAC pode ser utilizado para determinar quais modos da matriz de transição apresenta significado para a evolução.

⁴Pequeno tem um caráter qualitativo. Para cada caso é necessário avaliar α de modo a evitar rápida divergência.

10.2 Ensaio 2

10.2.1 Parte 2A

Foram usadas as matrizes de transição calculadas com as três diferentes situações da parte 1A:

1. Sem ruído no estado;
2. Com ruído uniforme adicionado no estado - desvio padrão $\sigma = 0.865\Omega m$, média nula e amplitude $3.0\Omega m$ pico a pico;
3. Com ruído uniforme adicionado no estado - desvio padrão $\sigma = 1.73\Omega m$, média nula e amplitude $6.0\Omega m$ pico a pico.

A matriz $\hat{\mathbf{Q}}_k$ foi atualizada, pela equação

$$\hat{\mathbf{Q}}_k = \begin{cases} \lambda \hat{\mathbf{P}}_{k-1} & , \quad k \leq 3 \\ \hat{\mathbf{Q}}_{k-1} & , \quad k > 3 \end{cases}, \quad (10.3)$$

ajustada empiricamente de modo a evitar o fechamento do filtro a novas informações.

Os parâmetros utilizados no FEK foram ajustados também empiricamente e são detalhados abaixo:

Tabela 10.1: Parâmetros utilizados no FEK.

Ruído do estado	sem ruído	$\sigma = 0.865\Omega m$	$\sigma = 1.72\Omega m$
$\hat{\mathbf{P}}_0$	$10^2 \mathbb{I}$	$10^1 \mathbb{I}$	$10^1 \mathbb{I}$
$\hat{\mathbf{Q}}_0$	$10^2 \hat{\mathbf{P}}_0$	$10^{-1} \hat{\mathbf{P}}_0$	$5 \cdot 10^{-1} \hat{\mathbf{P}}_0$
$\hat{\mathbf{R}}_k$	$10^{-2} \mathbb{I}$ (constante)		
$\hat{\rho}_0$ [Ωm]	60 (uniforme)		40 (uniforme)
λ	10^2	10^{-1}	$5 * 10^{-1}$

As Fig. (10.17), Fig. (10.18) e Fig. (10.19) mostram os resultados das simulações para três diferentes valores de ruído no estado usados no ensaio 1A. Os gráficos da coluna esquerda mostram a evolução do estado estimado, o resíduo normalizado (eq. (9.8)) e o estado em um determinado instante quando não é adicionado ruído nas tensões. Já a coluna da direita mostra os mesmos gráficos, mas com a adição de ruído nas tensões. Os níveis de ruído adicionados nas tensões, em cada uma das três situações são:

situação 1: desvio padrão $\sigma = 0.028V$, média nula e amplitude $10^{-1}V$ pico a pico;

situação 2: desvio padrão $\sigma = 0.028V$, média nula e amplitude $10^{-1}V$ pico a pico;

situação 3: desvio padrão $\sigma = 0.0028V$, média nula e amplitude $10^{-2}V$ pico a pico.

Os resultados mostram que o uso da matriz de transição obtida no ensaio 1A no FEK permite que o estado do sistema seja encontrado de forma satisfatória. Os gráficos dos resíduos normalizados em todos os ensaios realizados mostram um comportamento decrescente e as imagens finais mostram que o estado obtido está localizado na posição correta.

O uso de ruído nas medidas de tensão foi feita para remover os efeitos do crime inverso nas simulações. O nível de ruído adicionado é muitas vezes maior que o nível de ruído presente nos sensores, isto foi feito para testar os limites de aceitação de incerteza do FEK em relação aos ruídos de medidas. Comparando as três situações, nota-se um aumento do resíduo conforme os níveis de ruído aumentam.

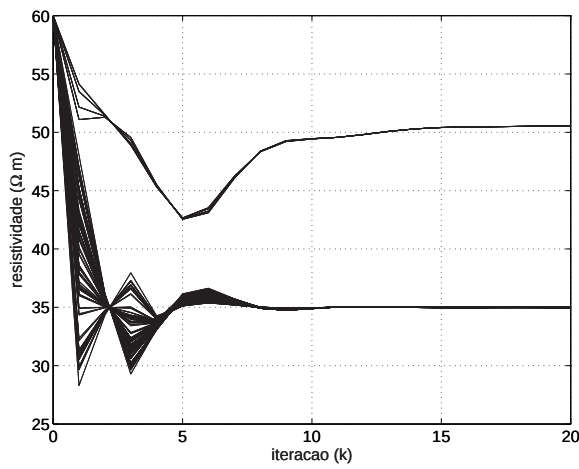
O número de iterações necessárias para a convergência do FEK no trabalho de Trigo(4) é da ordem de centenas, já nestes resultados, nota-se que o número de iterações é menor que 100, da ordem de dezenas. Isto mostra que o método de determinação da matriz de transição consegue acelerar a convergência do filtro.

A convergência da estimação com o uso dos estados iniciais $\hat{\rho}_0$ descritos acima são suficientes para mostrar que o filtro é suficientemente robusto para aplicações onde o estado inicial não é conhecido. Esta robustez em relação ao estado inicial é de grande

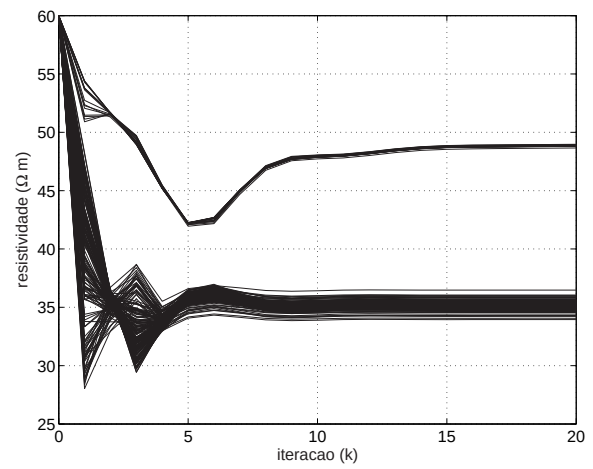
importância pois geralmente o estado inicial deve ser informado ao filtro e é comum, em aplicações biomédicas, o uso do valor médio de resistividade elétrica do corpo humano.

Os resultados da primeira situação mostram a existência de um sobre-sinal de aproximadamente $6\Omega m$. Isto pode ser reduzido diminuindo-se o valor de $\hat{Q}_k$, com a consequência de tornar o FEK mais lento. Observando os valores ajustados para $\hat{Q}_0$ nas três situações, nota-se que o aumento do ruído no estado deve ser contrabalançado com uma diminuição dos valores de $\hat{Q}_k$ e $\hat{P}_0$ de modo a aumentar o tempo de resposta do filtro e, assim, reduzir os efeitos de alta frequência do estado.

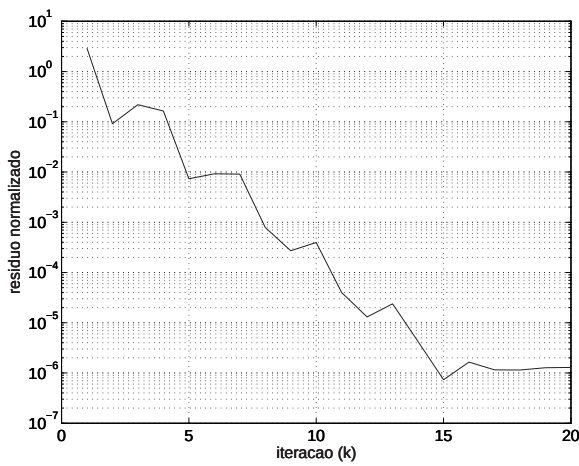
10.2.1.1 Situação 1: sem ruído no estado



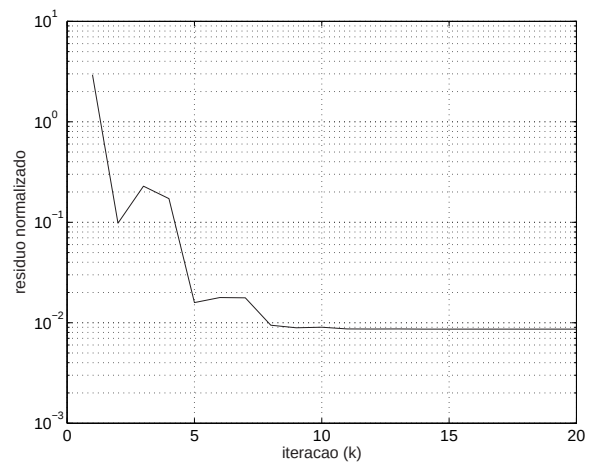
(a) Evolução do estado estimado.



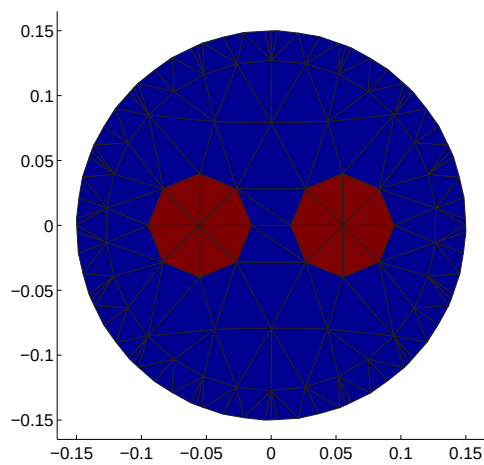
(b) Evolução do estado estimado.



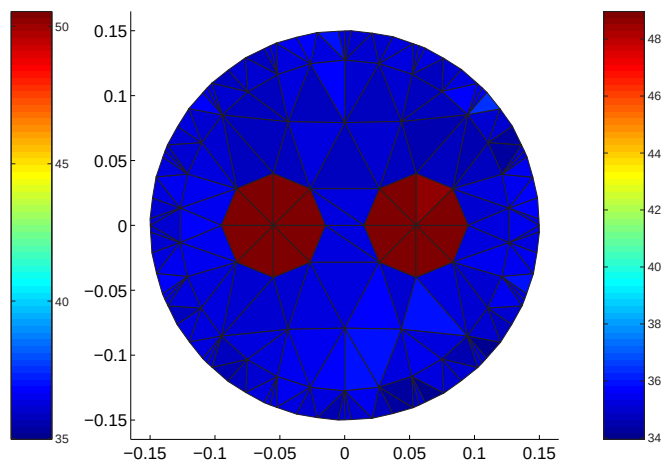
(c) Resíduo normalizado.



(d) Resíduo normalizado.



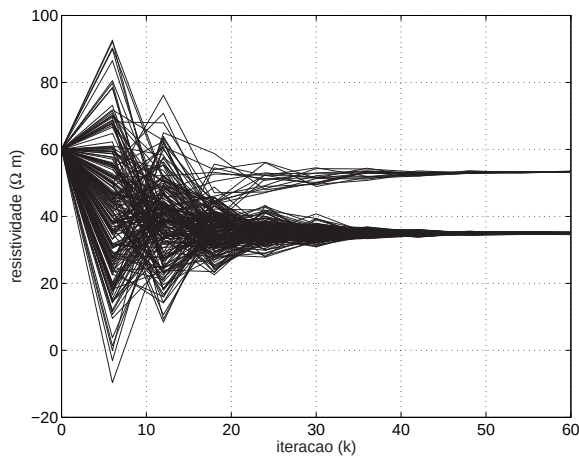
(e) Estado em k=20.



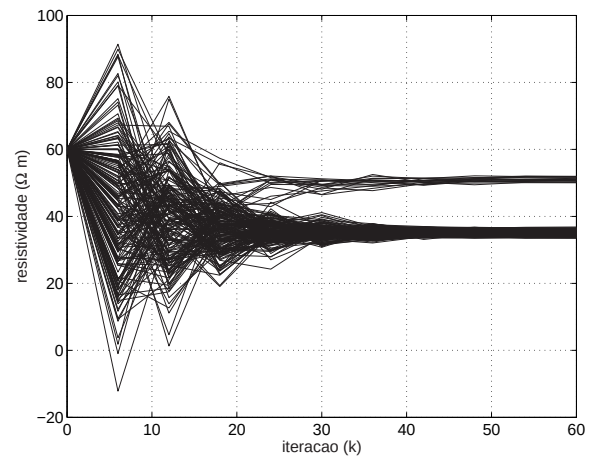
(f) Estado em k=20.

Figura 10.17: Resultados do ensaio.

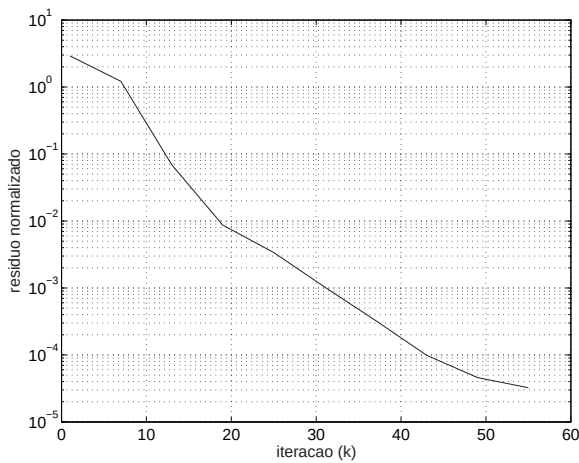
10.2.1.2 Situação 2: com ruído uniforme no estado $\sigma = 0.865\Omega m$



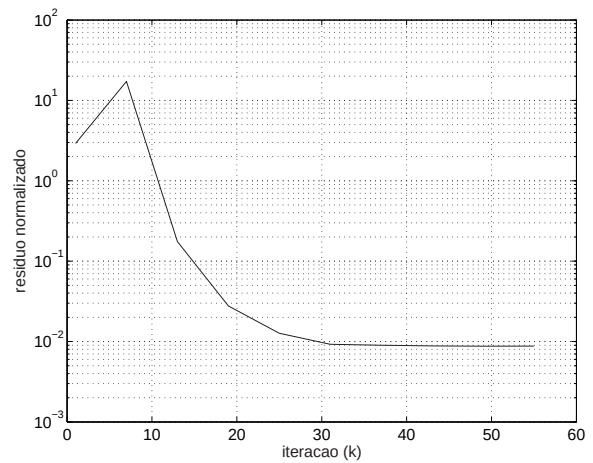
(a) Evolução do estado estimado.



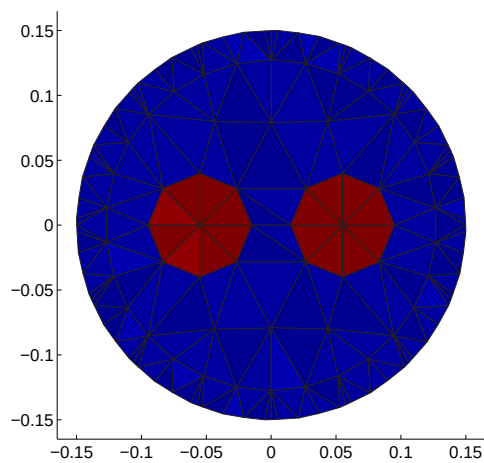
(b) Evolução do estado estimado.



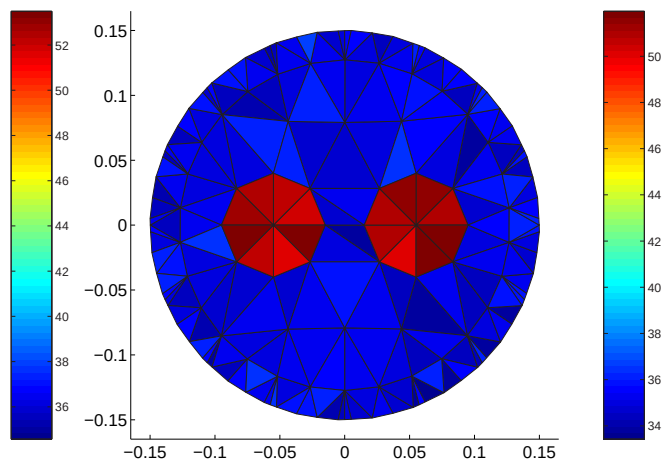
(c) Resíduo normalizado.



(d) Resíduo normalizado.



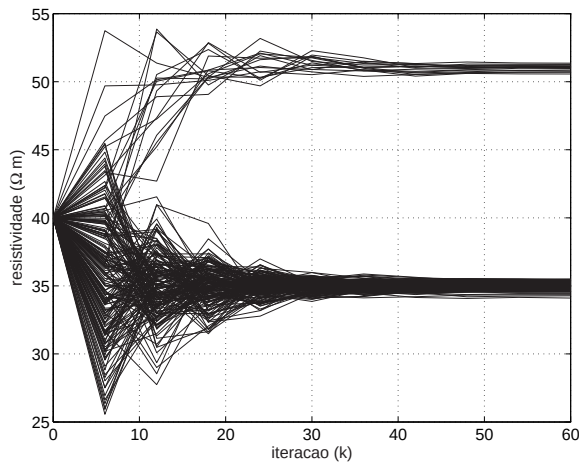
(e) Estado em k=60.



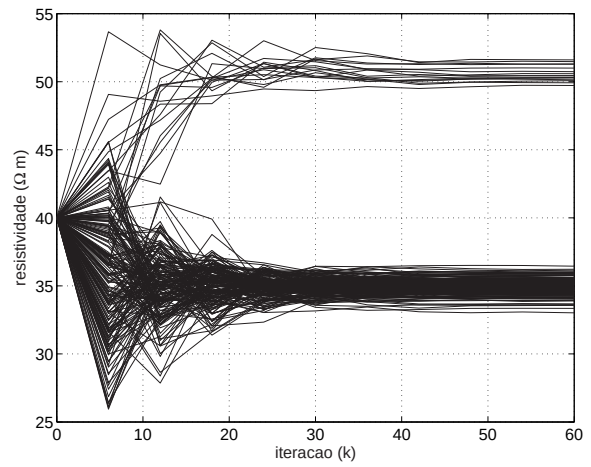
(f) Estado em k=60.

Figura 10.18: Resultados do ensaio.

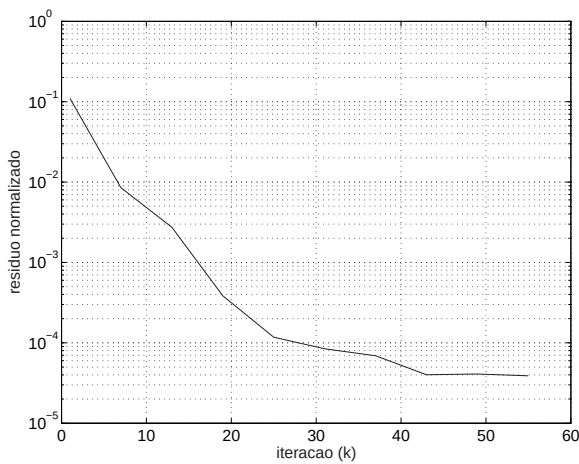
10.2.1.3 Situação 3: com ruído uniforme no estado $\sigma = 1.72\Omega m$



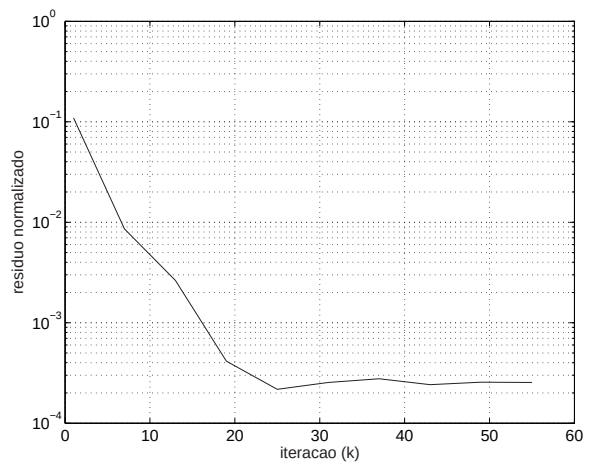
(a) Evolução do estado estimado.



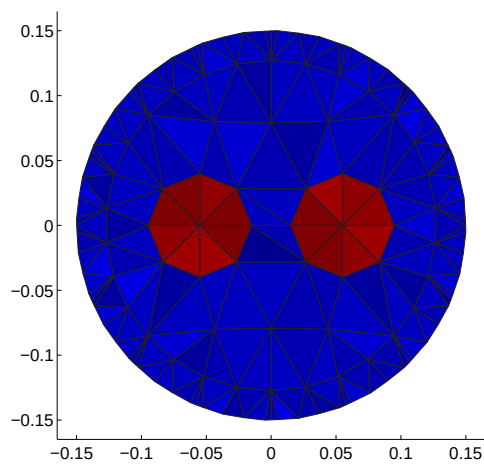
(b) Evolução do estado estimado.



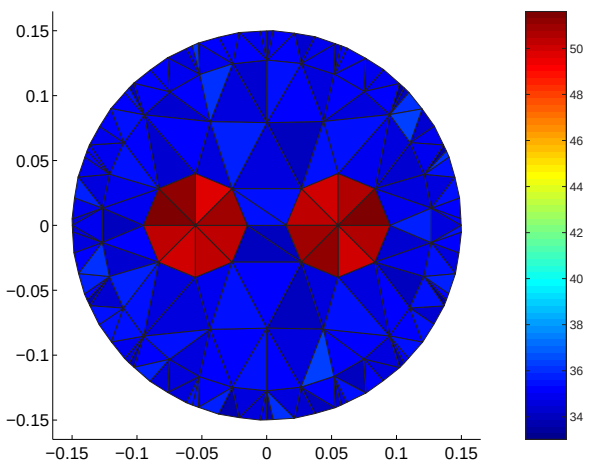
(c) Resíduo normalizado.



(d) Resíduo normalizado.



(e) Estado em k=60.



(f) Estado em k=60.

Figura 10.19: Resultados do ensaio.

10.2.2 Parte 2C

Como a sensibilidade das medidas de tensão é melhor para objetos localizados na periferia do domínio, optou-se por realizar a parte C do ensaio 2 antes da parte B de modo a ajustar os parâmetros do FEK com mais facilidade.

As simulações foram realizadas utilizando a matriz de transição obtida a partir da segunda situação ensaiada na parte 1C: com ruído uniforme aditivo nas tensões obtidas no *phantom* numérico.

A matriz $\hat{\mathbf{Q}}_k$ foi atualizada, pela equação

$$\hat{\mathbf{Q}}_k = \begin{cases} \lambda \hat{\mathbf{P}}_{k-1} & , \quad k \leq 3 \\ \hat{\mathbf{Q}}_{k-1} & , \quad k > 3 \end{cases}, \quad (10.4)$$

ajustada também empiricamente de modo a evitar o fechamento do filtro a novas informações.

Observando a evolução do estado estimado pelo filtro, notou-se grande oscilação no início da estimação, levando a valores fisicamente impossíveis para a resistividade de alguns elementos nos primeiros passos do filtro (valores negativos). Esta oscilação ocorre pela tentativa de correção do estado utilizando um modelo linearizado para a observação feito em um ponto muito longe do verdadeiro. Para diminuir o efeito de oscilação do estado, empregou-se um fator de sub-relaxação γ na equação do ganho de Kalman $\hat{\mathbf{G}}_k$. Isto foi utilizado para diminuir a correção do filtro nas primeiras iterações, até que a linearização do modelo de observação não causasse ocorrência de estimações para o estado fisicamente incorretas.

O fator de sub-relaxação utilizado é introduzido multiplicando-se a matriz de ganho do filtro (eq. (7.35)) pelo fator γ dado por ⁵:

$$\hat{\mathbf{G}}_k = \gamma_k (\hat{\mathbf{P}}_k^{(-)} \hat{\mathbf{H}}_k^T [\hat{\mathbf{H}}_k \hat{\mathbf{P}}_k^{(-)} \hat{\mathbf{H}}_k^T + \hat{\mathbf{R}}_k]^{-1}) \quad (10.5)$$

$$\gamma_k = \begin{cases} 0.1 & , \quad k < 5 \\ 0.5 & , \quad k < 8 \\ 1.0 & , \quad k \geq 8 \end{cases} \quad (10.6)$$

Os parâmetros utilizados no FEK foram ajustados com o intuito de apresentar boa resolução espacial na imagem, minimizar a ocorrência de artefatos na imagem e maximizar a taxa de convergência do estado a partir de um estado inicial incorreto. A convergência do FEK foi avaliado através da média e desvio padrão do resíduo de observação. Considera-se que o filtro atingiu a convergência se (4):

1. a média do resíduo é zero e
2. o desvio padrão do resíduo é menor que três vezes o desvio padrão do ruído das medidas.

Na prática, a convergência foi considerada satisfatória se $\|\bar{r}_k\| + \sigma_{r_k}$ estiver dentro do intervalo entre zero e três vezes o desvio padrão do ruído das medidas. Além disto, uma análise da imagem obtida pelo FEK também é utilizada para a avaliação.

O ajuste dos parâmetros do FEK considerou os seus efeitos separados, isto é, fixou-se todos os parâmetros com exceção de um. Para começar, a escolha de $\hat{\mathbf{P}}_0$ foi feita de modo a superestimar a qualidade do chute inicial do estado. Isto foi feito para testar a capacidade do filtro em corrigir estimativas erradas. Para tanto, foi admitido um estado inicial uniforme diferente da imagem média $\hat{\rho}_0 = 60\Omega m$ e $\hat{\mathbf{P}}_0 = 10^1 \mathbb{I}$, que equivale dizer que o desvio padrão do erro inicial seria um pouco maior⁶ que $3\Omega m$.

⁵Salienta-se que a função que descreve fator de sub-relaxação deve ser ajustada para cada conjunto de parâmetros do filtro, porém neste trabalho apenas uma função foi utilizada.

⁶Na realidade $\hat{\mathbf{P}}_0$ deveria ser da ordem de 10^2 para este valor de $\hat{\rho}_0$.

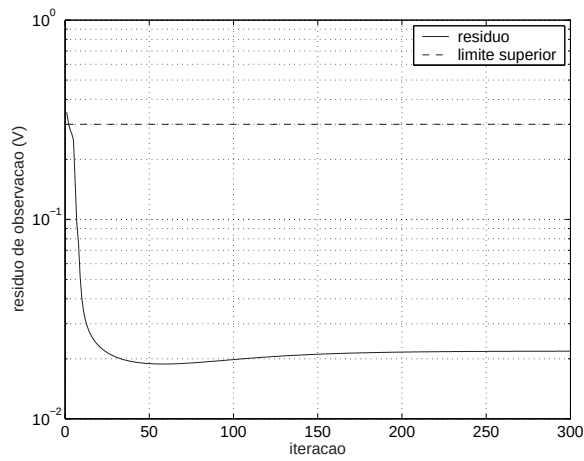
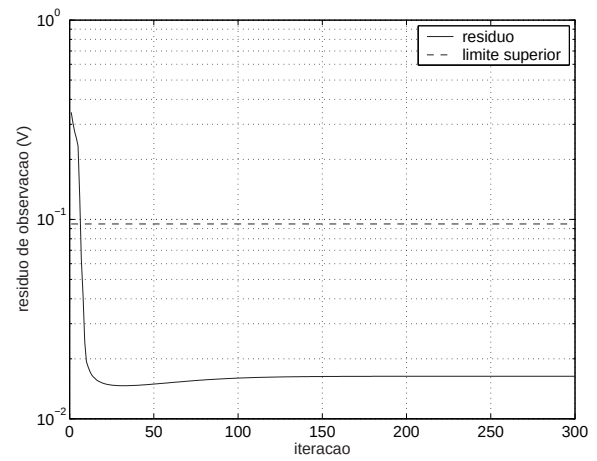
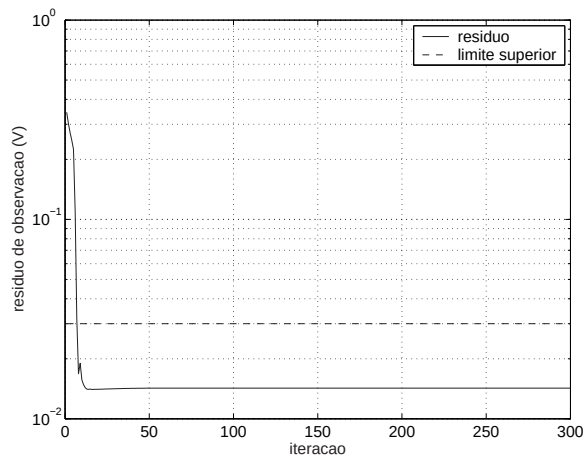
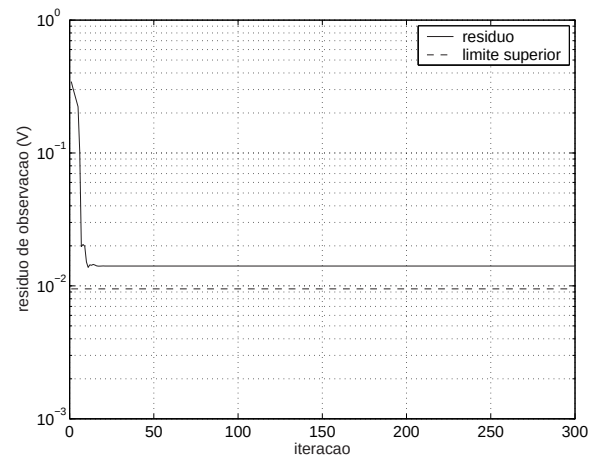
10.2.2.1 Ajuste de R

A Fig. (10.20) mostra a evolução do ruído de medidas para quatro casos, mantendo-se iguais todos os outros parâmetros. As linhas tracejadas equivalem ao limite superior que define a convergência estatística do filtro. A tabela a seguir mostra os parâmetros usados em cada uma das simulações

Tabela 10.2: Parâmetros utilizados no FEK.

Ensaio	2C-01	2C-02	2C-03	2C-04
$\hat{\mathbf{R}}_k$ (constante)	$10^{-2}\mathbb{I}$	$10^{-3}\mathbb{I}$	$10^{-4}\mathbb{I}$	$10^{-5}\mathbb{I}$
$\hat{\mathbf{P}}_0$	$10^1\mathbb{I}$			
$\hat{\mathbf{Q}}_0$	$10^{-3}\hat{\mathbf{P}}_0$			
$\hat{\rho}_0$ [Ωm]	60 (uniforme)			
λ	10^{-3}			

Os níveis reais de ruído uniforme adicionados nas medidas apresenta desvio padrão $\sigma = 2.8 * 10^{-6}V$, média nula e amplitude 10^{-5} vezes o maior valor medido de potencial elétrico. Com estas estatísticas, o valor de $\hat{\mathbf{R}}_0$ deveria ser da ordem de 10^{-10} porém, como comentado na seção 6.4.3, os erros de linearização e discretização diminuem a certeza com a qual os parâmetros do modelo possam ser ajustados de modo a reduzir o resíduo de medida. O valor considerado como mais adequado refere-se ao ensaio 2C-03: $\hat{\mathbf{R}}_k = 10^{-4}\mathbb{I}$.

(a) Ensaio 2C-01 ($\hat{\mathbf{R}}_k = 10^{-2}\mathbb{I}$).(b) Ensaio 2C-02 ($\hat{\mathbf{R}}_k = 10^{-3}\mathbb{I}$).(c) Ensaio 2C-03 ($\hat{\mathbf{R}}_k = 10^{-4}\mathbb{I}$).(d) Ensaio 2C-04 ($\hat{\mathbf{R}}_k = 10^{-5}\mathbb{I}$).Figura 10.20: Evolução do resíduo de observação para diversos valores de $\hat{\mathbf{R}}_k$ (constante).

10.2.2.2 Ajuste de Q

A seguir mostra-se os efeitos de $\hat{Q}_k$ na evolução do estado para três casos, mantendo-se iguais todos os outros parâmetros. Em todos os casos usou-se $\hat{R}_k = 10^{-4}\mathbb{I}$ obtido no subitem anterior. A tabela a seguir mostra os parâmetros usados em cada uma das simulações

Tabela 10.3: Parâmetros utilizados no FEK.

Ensaio	2C-05	2C-06	2C-07
$\hat{R}_k$	$10^{-4}\mathbb{I}$ (constante)		
$\hat{P}_0$	$10^1\mathbb{I}$		
$\hat{Q}_0$	$10^{-3}\hat{P}_0$	$10^{-4}\hat{P}_0$	$10^{-5}\hat{P}_0$
$\hat{\rho}_0$ [Ωm]	60 (uniforme)		
λ	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}

A Fig. (10.21) mostra os resultados das simulações para as três situações. Os gráficos da coluna esquerda mostram a evolução do estado estimado, já a coluna da direita mostra o estado estimado em $k = 300$. A circunferência desenhada sobre a imagem dos elementos mostra a posição e tamanho verdadeiro do objeto.

Observando a Fig. (10.21), nota-se que a diminuição de $\hat{Q}_k$ causa redução da taxa de convergência do FEK e reduz a resistividade do objeto, porém diminui o nível de flutuações na imagem final e conseqüentemente aumenta a qualidade das imagens. Além disto, a diminuição de $\hat{Q}_k$ causa aumento da resolução espacial, como pode ser visto nas imagens da coluna da direita da Fig. (10.21).

Conforme $\hat{Q}_k$ diminui, há uma redução da amplitude de resistividade do objeto. Devido a esta redução, o resíduo de medição aumenta, o que pode ser visto na Fig. (10.22). Apesar deste aumento, o resíduo permanece dentro da faixa de três vezes o desvio padrão do ruído de medida.

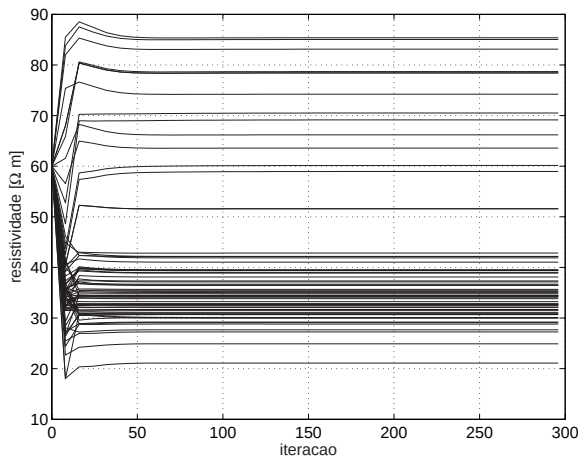
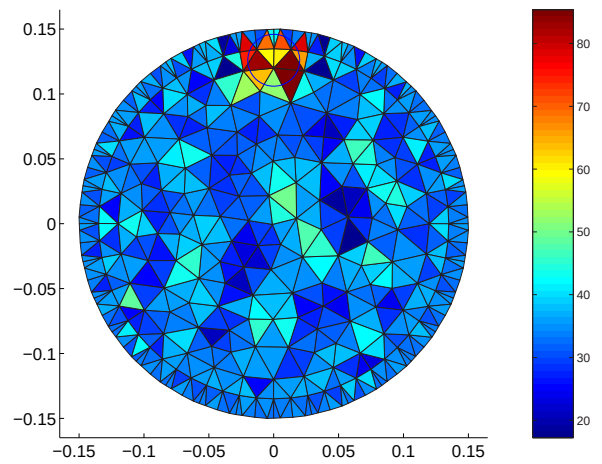
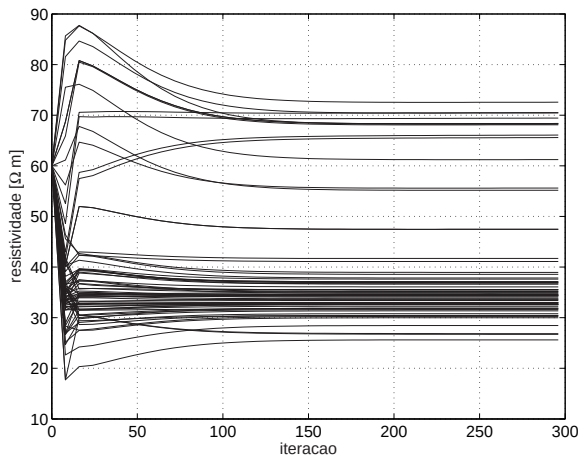
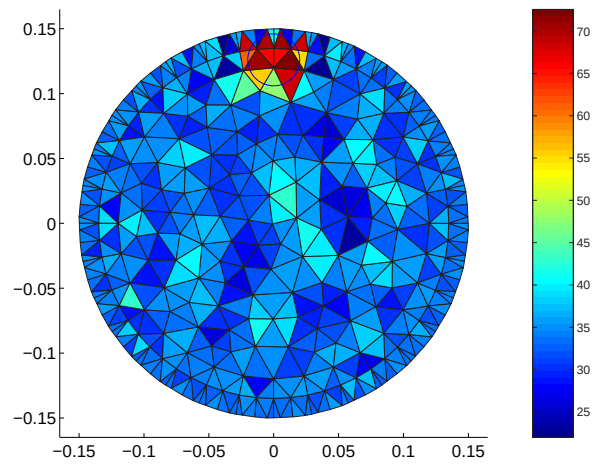
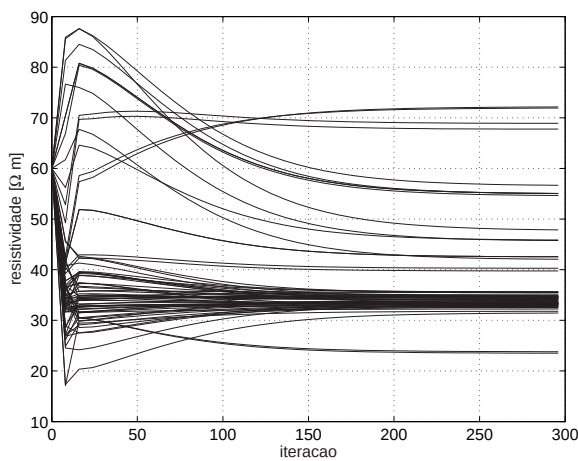
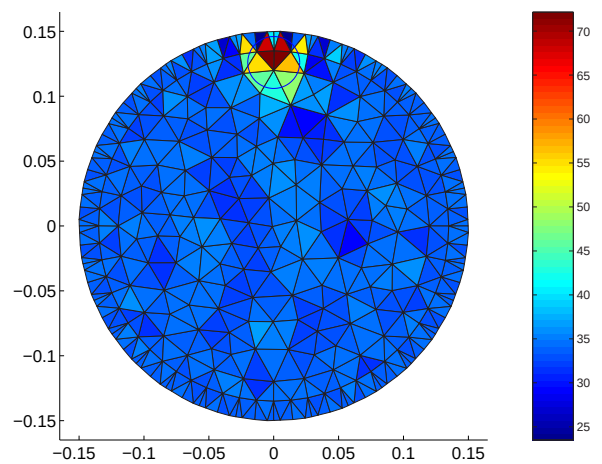
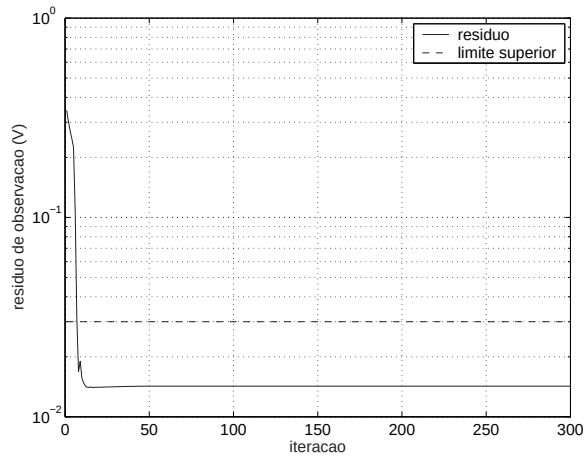
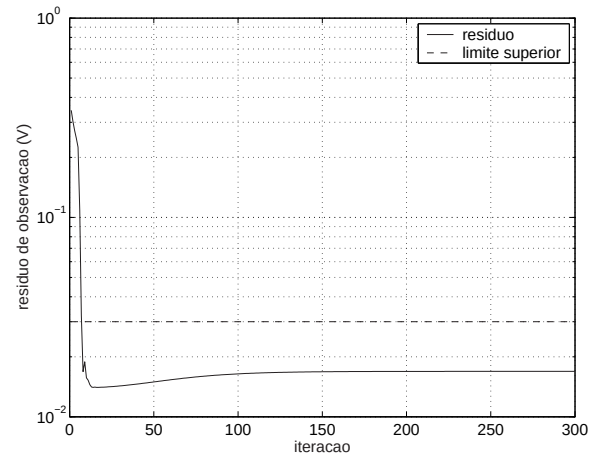
(a) Ensaio 2C-05 ($\hat{Q}_k = 10^{-3} \hat{P}_k$).(b) Ensaio 2C-05 ($\hat{Q}_k = 10^{-3} \hat{P}_k$).(c) Ensaio 2C-06 ($\hat{Q}_k = 10^{-4} \hat{P}_k$).(d) Ensaio 2C-06 ($\hat{Q}_k = 10^{-4} \hat{P}_k$).(e) Ensaio 2C-07 ($\hat{Q}_k = 10^{-5} \hat{P}_k$).(f) Ensaio 2C-07 ($\hat{Q}_k = 10^{-5} \hat{P}_k$).

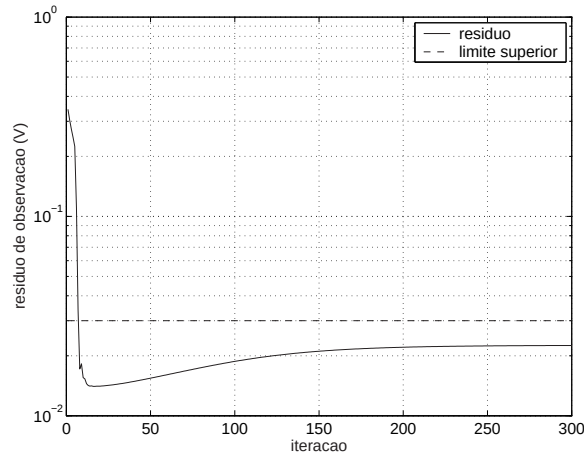
Figura 10.21: Evolução do estado e estado final da simulação para diversos valores de $\hat{Q}_k$.



(a) Ensaio 2C-05 ($\hat{Q}_0 = 10^{-3} \hat{P}_0$).



(b) Ensaio 2C-06 ($\hat{Q}_0 = 10^{-4} \hat{P}_0$).



(c) Ensaio 2C-07 ($\hat{Q}_0 = 10^{-5} \hat{P}_0$).

Figura 10.22: Evolução do resíduo para diversos valores de $\hat{Q}_0$.

Analisando as imagens e os resíduos, escolheu-se o ensaio 2C-07 como o melhor conjunto de parâmetros para o objeto na periferia.

10.2.3 Parte 2B

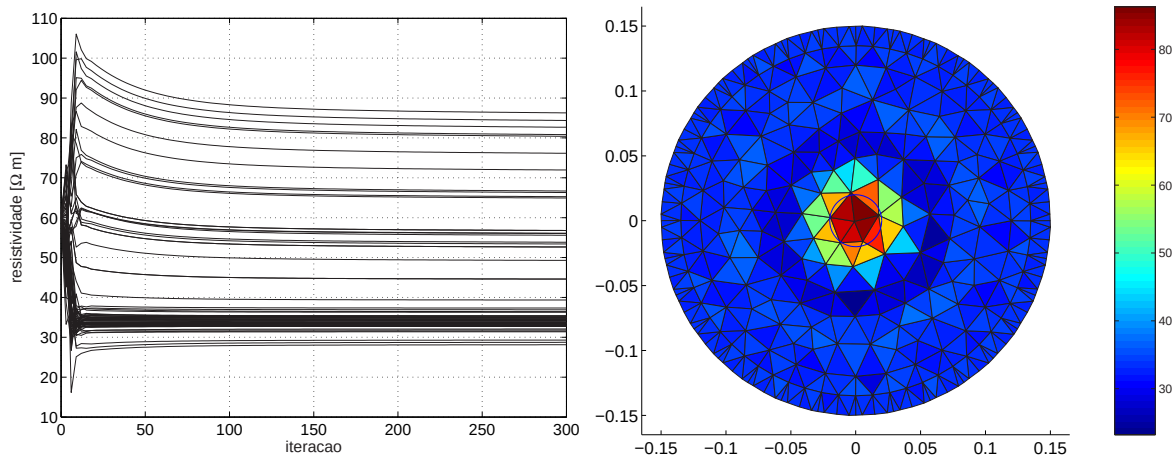
Na parte B do ensaio 2, usou-se inicialmente os parâmetros escolhidos no ensaio 2C. Então os parâmetros foram variados afim de verificar se outros valores apresentam resultados melhores.

As simulações foram realizadas utilizando a matriz de transição obtida a partir da segunda situação ensaiada na parte 1B: com ruído uniforme aditivo nas tensões obtidas no *phantom* numérico. Os mesmos fatores de sub-relaxação foram utilizadas conforme discutido no ensaio anterior.

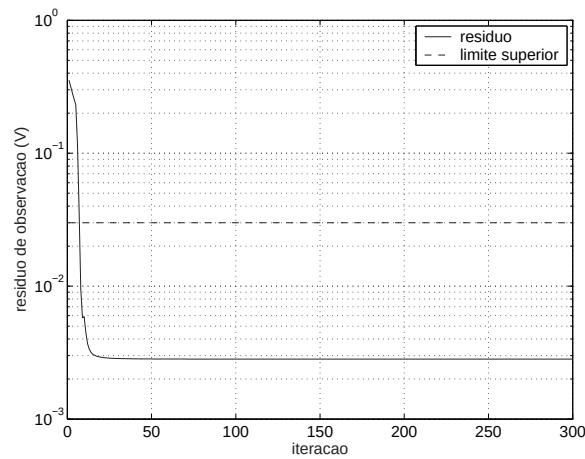
A Fig. (10.23) mostra a evolução do estado, a imagem ao final da iteração 300 e o resíduo de observação, utilizando o conjunto de parâmetros obtido no ensaio 2C

Tabela 10.4: Parâmetros utilizados no FEK.

Ensaio	2B-01
$\hat{\mathbf{R}}_k$	$10^{-4}\mathbb{I}$ (constante)
$\hat{\mathbf{P}}_0$	$10^1\mathbb{I}$
$\hat{\mathbf{Q}}_0$	$10^{-5}\hat{\mathbf{P}}_0$
$\hat{\rho}_0$ [Ωm]	60 (uniforme)
λ	10^{-5}



(a) Evolução do estado.

(b) Estado em $k = 300$.

(c) Resíduo de observação.

Figura 10.23: Estimação do estado para o ensaio 2B-01.

Nota-se na Fig. (10.23) que o resíduo de observação médio mais o seu desvio padrão é aproximadamente dez vezes menor que o limite admissível, enquanto que no ensaio 2C-07, o resíduo é aproximadamente apenas duas vezes menor (Fig. 10.22(c)).

Esta redução pode ser explicada através do maior distanciamento entre o objeto e os eletrodos: apesar do aumento da distância entre o objeto e os eletrodos causar problemas de sensibilidade, este distanciamento reduz o resíduo de observação pois a perturbação do estado está mais afastada destes. Como o resíduo é calculado pela diferença entre os potenciais medidos e os potenciais calculados com a estimativa de resistividade, quanto mais a estimativa de resistividade de uma certa região se afasta

do valor verdadeiro, maiores tornam-se as diferenças no campo potencial ao redor desta região. Nos casos ensaiados, percebe-se que as regiões perto dos objetos apresentam os maiores erros de estimação, logo no caso em que o objeto está próximo dos eletrodos (Ensaio C), maiores são as diferenças entre o campo potencial medido e calculado com a estimativa nesta região e, por consequência, maiores serão os resíduos.

Este efeito pode ser visto graficando a média ao longo das iterações do resíduo de observação de cada um dos eletrodos separadamente, e em cada padrão de corrente, num total de e^2 medidas. Cabe uma explicação a respeito deste número: não se pode considerar que a informação de potencial medido por um eletrodo em um dado padrão de corrente tenha o mesmo significado que nos outros padrões pois o fluxo de corrente elétrica muda a cada novo padrão de corrente, então deve-se considerar que as e^2 medições são provenientes de sensores diferentes. A Fig. (10.24) mostra os gráficos das médias temporais dos resíduos de observação de cada um dos eletrodos e em cada padrão de corrente.

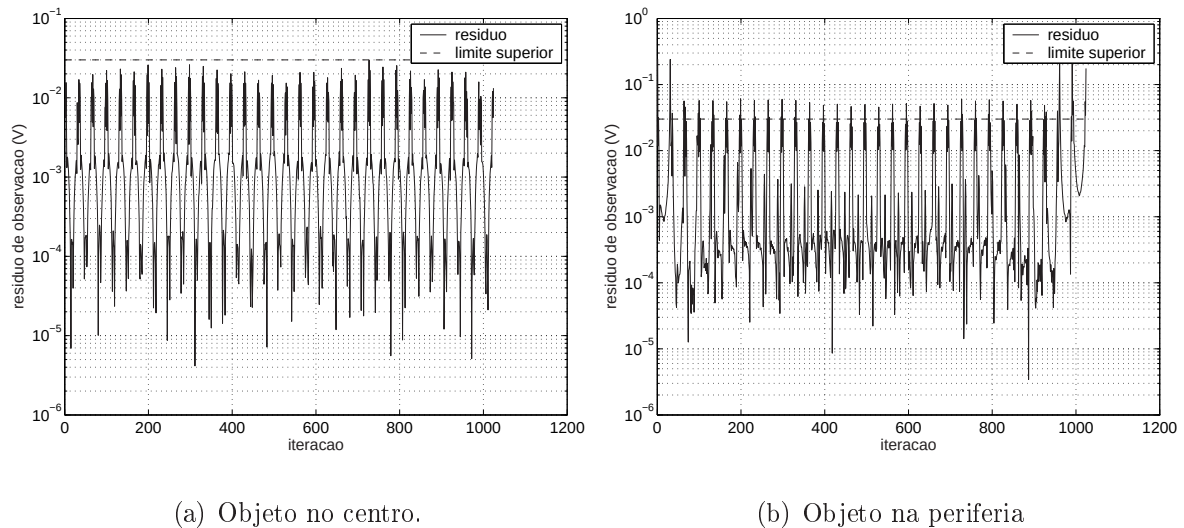


Figura 10.24: Resíduo de observação de cada sensor, nos ensaios com o objeto no centro e na periferia, com os mesmos conjuntos de parâmetros do ensaio 2C-07.

Nota-se alguns pontos nestes gráficos:

1. Utilizando a Fig. 10.24(b) para avaliar a convergência estatística do FEK, conclui-se que não há convergência do filtro, o que contradiz a avaliação feita utilizando a

Fig. (10.23), já a Fig. 10.24(a) apresenta convergência. Isto é um indício de que o critério adotado, dado pela eq. (9.8), não é suficiente para avaliar o resíduo de medida pois pode mascarar alguns resíduos altos⁷.

2. Para corroborar a discussão sobre o aumento do resíduo quando o objeto está próximo do eletrodo, nota-se que na Fig. 10.24(b) há um aumento expressivos do resíduo de medida nos primeiros e últimos padrões de corrente (primeiros e últimos valores). Estes padrões são exatamente os que mais se aproximam da região onde o objeto está. Nota-se que no gráfico da Fig. 10.24(a) não aparece tal variação, pois a perturbação de resistividade é igualmente distante de todos os eletrodos.
3. Existe uma periodicidade clara nos resíduos dos eletrodos. Isto também pode ser explicado: Conforme o par de eletrodos de medição de potencial se aproxima do par de eletrodos de injeção de corrente⁸, os efeitos de discretização da malha tornam-se mais evidentes. A associação entre a função de interpolação dos elementos finitos adotada (linear), a pequena discretização da malha de elementos finitos e a diminuição da distância entre os eletrodos conforme os pares escolhidos estão mais próximos, causam problemas de interpolação do potencial elétrico, causando aumento do resíduo de observação.

Com base na redução do resíduo de observação, decidiu-se reduzir os valores da matriz $\hat{\mathbf{R}}_k$, aumentando-se assim a confiança nos valores medidos de potencial. O processo para determinar os valores segue os mesmos passos do ensaio 2C.

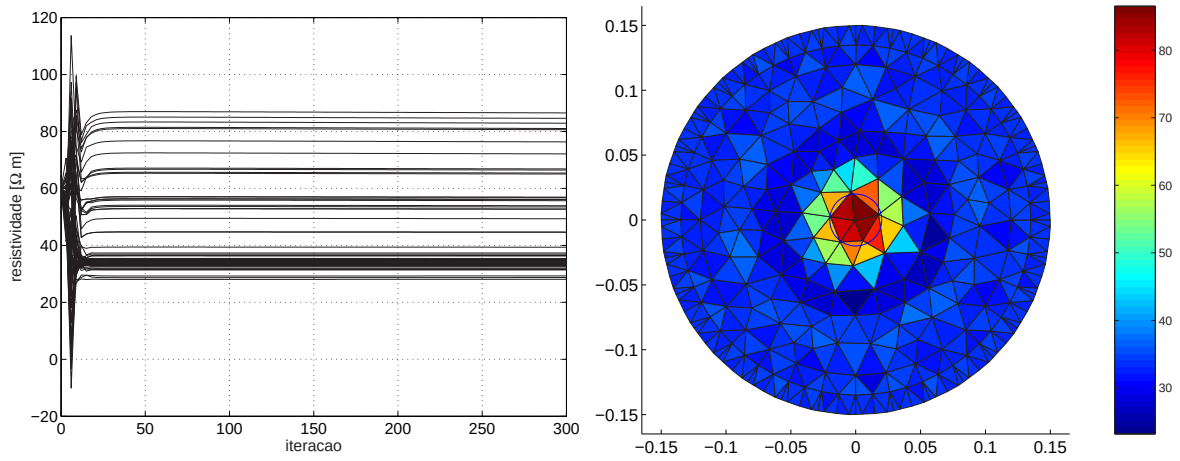
A Fig. (10.25) mostra a evolução do estado, a imagem ao final da iteração 300 e o resíduo de observação no caso onde o resíduo mais se aproximou do limite. O conjunto de parâmetros utilizado está na tabela a seguir.

⁷Apesar desta constatação, não se propôs outro critério de convergência pois isto está fora do escopo do presente trabalho

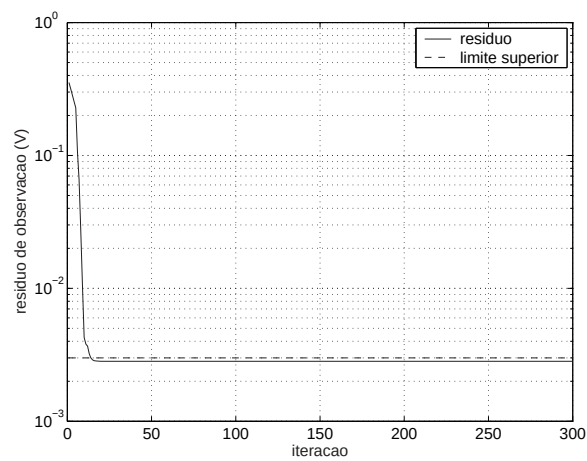
⁸Vide seção 2.5

Tabela 10.5: Parâmetros utilizados no FEK.

Ensaio	2B-02
$\hat{\mathbf{R}}_k$	$10^{-6}\mathbb{I}$ (constante)
$\hat{\mathbf{P}}_0$	$10^1\mathbb{I}$
$\hat{\mathbf{Q}}_0$	$10^{-5}\hat{\mathbf{P}}_0$
$\hat{\rho}_0$ [Ωm]	60 (uniforme)
λ	10^{-5}



(a) Evolução do estado.

(b) Estado em $k = 300$.

(c) Resíduo de observação.

Figura 10.25: Estimação do estado para o ensaio 2B-02.

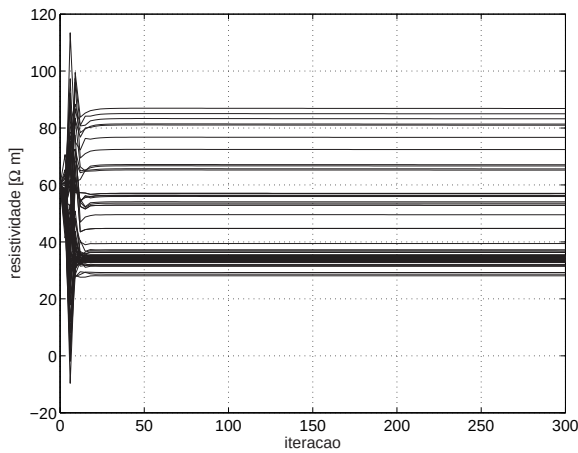
Comparando a evolução do estado nos ensaios 2B-01 e 2B-02, nota-se que no segundo caso a convergência é mais rápida, em 50 iterações aproximadamente o filtro praticamente não altera mais o estado, enquanto que no ensaio 2B-01 é necessário aproximadamente 200 iterações. O estado final em ambos os casos é praticamente o mesmo, não havendo diferenças visuais entre as duas imagens.

A Matriz $\hat{\mathbf{Q}}_k$ representa o nível de incerteza presente no estado. Como a natureza da incerteza é semelhante, não importando a posição do objeto, o seu valor não deve ser muito diferente em relação aos ensaios da parte 2C.

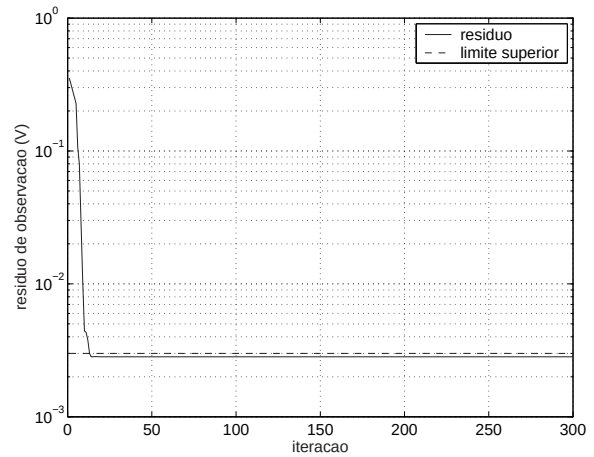
De fato, a Fig. (10.26) mostra a evolução do estado e o resíduo de observação variando o valor de $\hat{\mathbf{Q}}_k$. Nota-se pouca diferença na evolução do estado e do resíduo nas simulações 2B-02, 2B-03 e 2B-04.

Tabela 10.6: Parâmetros utilizados no FEK.

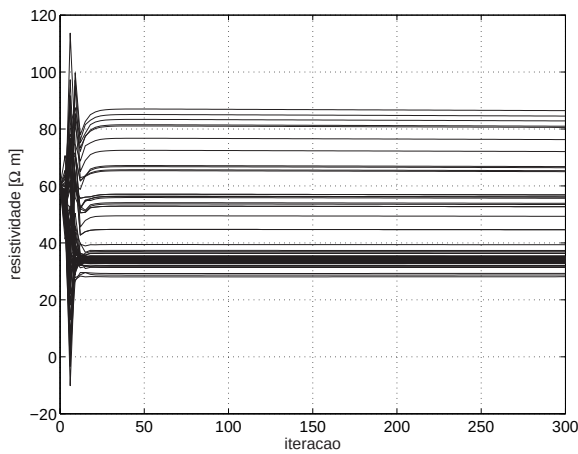
Ensaio	2B-03	2B-04
$\hat{\mathbf{R}}_k$	$10^{-6}\mathbb{I}$ (constante)	
$\hat{\mathbf{P}}_0$	$10^1\mathbb{I}$	
$\hat{\mathbf{Q}}_0$	$10^{-4}\hat{\mathbf{P}}_0$	$10^{-6}\hat{\mathbf{P}}_0$
$\hat{\rho}_0$ [Ωm]	60 (uniforme)	
λ	10^{-4}	10^{-6}



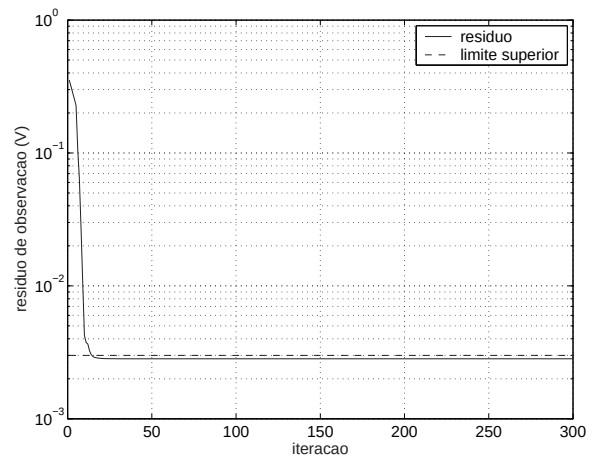
(a) Evolução do estado no ensaio 2B-03.



(b) Resíduo de observação no ensaio 2B-03.



(c) Evolução do estado no ensaio 2B-04.

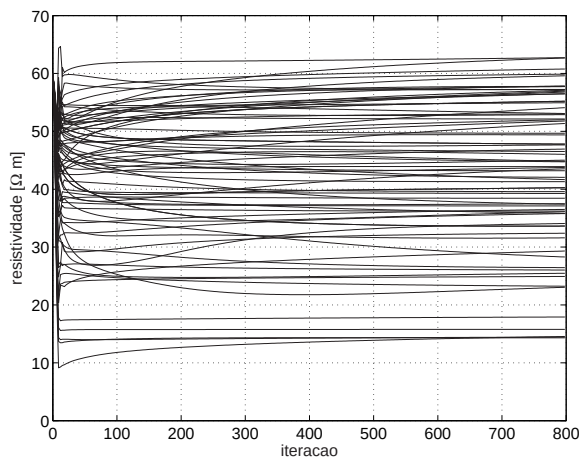


(d) Resíduo de observação no ensaio 2B-04.

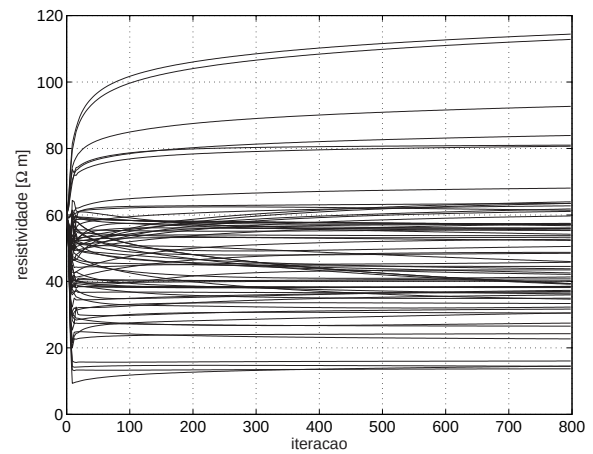
Figura 10.26: Resultados dos ensaios 2B-03 e 2B-04.

10.2.4 Comparação entre o modelo proposto e o passeio aleatório

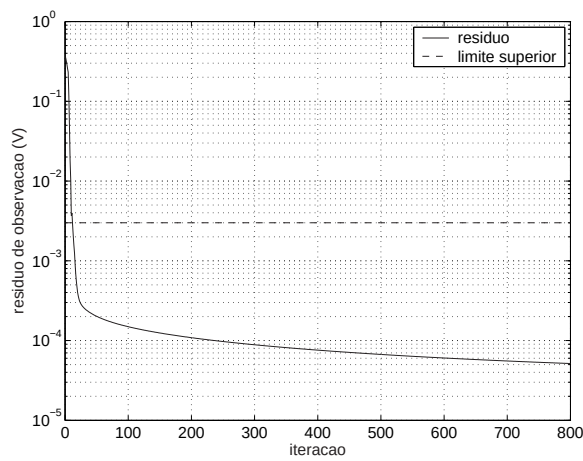
Por último, é necessário comparar a estimação do estado feito pelo FEK, utilizando a matriz de transição do modelo de passeio aleatório com a matriz de transição obtida pelo método proposto neste trabalho. Comparar os resultados aqui obtidos com o trabalho de Trigo(4) não é trivial pois o tamanho do estado observado aqui é muitas vezes maior. O que se fez então foi utilizar o modelo de evolução por passeio aleatório no FEK e comparar os resultados obtidos.



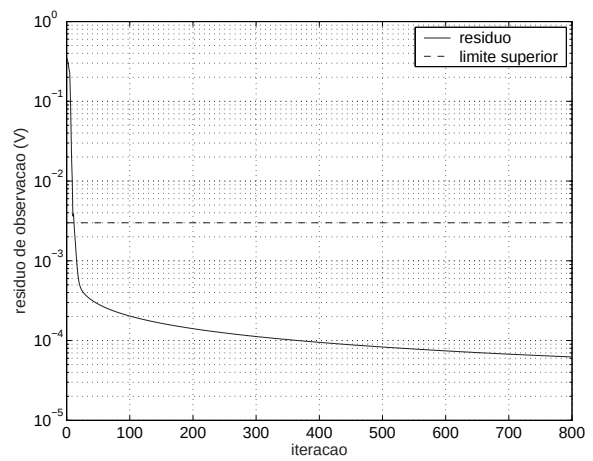
(a) Evolução do estado com objeto no centro.



(b) Evolução do estado com objeto na periferia.



(c) Resíduo de observação.



(d) Resíduo de observação.

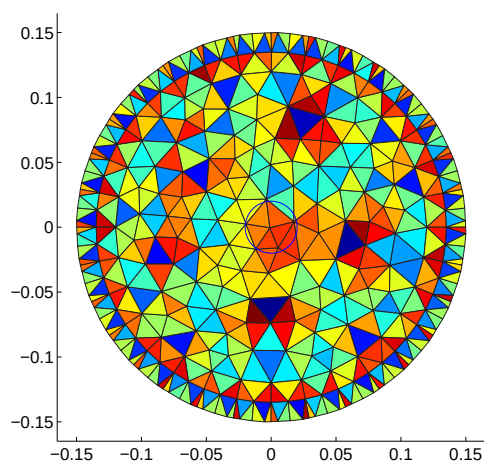
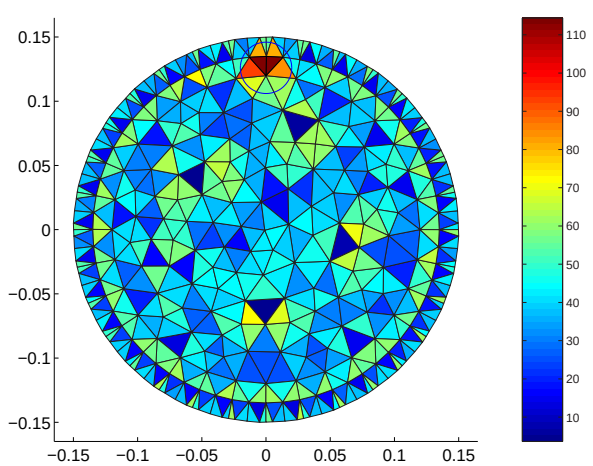
(e) Estado em $k = 800$.(f) Estado em $k = 800$.

Figura 10.27: Resultados obtidos nas simulações utilizando modelo de passeio aleatório.

A figura Fig. (10.27) mostra a evolução do estado, do resíduo e a imagem final

das simulações utilizando o passeio aleatório, considerando o objeto no centro (coluna da esquerda) e na periferia (coluna da direita). As simulações foram encerradas em $k = 800$ iterações, mas até esta iteração não houve convergência do estado, apesar do resíduo de observação permanecer dentro do limite de três desvios padrão, caracterizando convergência estatística. Observa-se também que as imagens finais estão muito aquém das imagens obtidas com o modelo de evolução proposto neste trabalho. Este problema é agravado considerando o objeto no centro do domínio, onde o FEK não conseguiu obter imagem com qualidade suficiente para destacar a posição do objeto.

10.2.5 Conclusões do ensaio 2

Enumeram-se as conclusões obtidas por este ensaio

1. O uso da matriz de transição obtida no ensaio 1 aumenta a taxa de convergência do FEK e aumenta a qualidade das imagens estimadas;
2. A estimação depende do estado inicial fornecido ao filtro. Os testes realizados utilizaram uma resistividade bem diferente do valor médio, mesmo assim o FEK conseguiu convergir para um estado aceitável;
3. Utilizou-se um fator de sub-relaxação para evitar grandes correções do estado nas primeiras iterações do filtro;
4. Verificou-se convergência estatística, conforme o critério usado em (4), porém este trabalho apresenta indícios de que este critério deve ser alterado;
5. A incerteza das medidas utilizada no FEK é maior que o valor real;
6. O resíduo de observação tem a tendência de ser maior quando o objeto está na periferia do domínio;
7. A discretização do domínio altera o resíduo de observação quando o par de eletrodo de injeção está próximo do par de medição de potencial.

11 DISCUSSÕES, COMENTÁRIOS FINAIS E SUGESTÕES

Neste trabalho mostrou-se a possibilidade de utilizar o método de Ibrahim para gerar uma matriz de transição do modelo de evolução do estado. O estado obtido pelo algoritmo caixa-preta apresenta valores de resistividade menores que o valor real do sistema devido a efeitos de não linearidade entre o potencial elétrico medido e a distribuição de resistividade em Γ , discretização do domínio e sensibilidade das medidas de potencial obtido em $\partial\Gamma$. Este problema agrava-se conforme o objeto se distancia da periferia do domínio.

A determinação da matriz de transição foi feita resolvendo um sistema linear mal condicionado, formado por imagens estimadas pelo caixa-preta e utilizando o método dos mínimos quadrados. O ruído adicionado nas medidas, afim de simular erros de medição e modelagem melhoram o condicionamento deste sistema, porém causam o aparecimento de modos de altas frequência (espaciais e temporais) nas imagens. Para diminuir o efeito do mal condicionamento, um método de regularização se fez necessário. Neste trabalho utilizou-se a regularização de Tikhonov.

O uso da regularização de Tikhonov adiciona amortecimento na evolução do sistema, observado através dos auto-valores da matriz de transição. Este amortecimento pode causar problemas para estimações de estados oscilantes pois a evolução do sistema tem a tendência de estabilizar em algum valor intermediário. Para contornar este problema podem ser pesquisados modos de alterar o amortecimento dos modos desejados através do tratamento dos auto-valores da matriz de transição.

Pode-se também investigar os efeitos da remoção dos modos da matriz de

transição sem importância no problema em estudo. No caso do presente trabalho por exemplo, a adição do ruído de medida causa o surgimento de modos com altas frequências. A remoção destes modos pode melhorar o modelo de evolução do estado. Tal remoção pode ser baseada na análise do MAC dos auto-vetores, conforme analisado neste trabalho.

Uma última possibilidade é modificar o equacionamento do filtro de Kalman para estimar qual a combinação linear dos modos que resultam no estado que minimiza o traço da matriz $\hat{\mathbf{P}}$. Desta forma, são os modos do sistema que são considerados variáveis de estado ao invés da resistividade de cada elemento, com isto o número de incógnitas que o filtro deve estimar poderá ser muitas vezes menor, trazendo mais robustez e possivelmente mais estabilidade para os filtros. Além disto, caso seja possível estimar modos com alta resolução espacial, a estimativa do estado também apresentará melhor resolução sem grandes aumentos do custo computacional.

O uso de uma matriz de transição no FEK acelerou o processo de convergência em comparação com o passeio aleatório. A robustez do FEK em relação ao nível de incerteza do estado inicial também foi testada e mostrou-se, nos casos ensaiados, que é suficiente utilizar uma estimativa da resistividade média do meio para que o filtro convirja.

A incerteza do modelo de evolução foi testada utilizando um modelo diferente para a matriz de transição e para o estado a ser estimado pelo FEK. Os resultados mostraram que mesmo com esta diferença, o FEK conseguiu estimar o estado com convergência estatística conforme (4). Neste trabalho mostrou-se indícios de que este critério necessita algumas modificações, pois o uso do resíduo médio de todas as medidas em um determinado instante pode mascarar altos resíduos de alguns sensores. A análise do resíduo médio de cada medida de potencial ao longo da estimação mostra que erros de estimação em objetos próximos da periferia causam maiores resíduos de observação. Além disto, mostrou-se que a discretização de $\mathbf{\Gamma}$ também influencia o resíduo.

Neste trabalho não foi utilizada nenhuma definição de regiões de interesse para diminuir o número de variáveis de estado, tampouco outras regularizações para melhorar

o condicionamento do problema inverso, além daquela que o Filtro de Kalman configura. Com o intuito de reduzir as grandes oscilações nas estimativas do estado nas primeiras iterações do filtro, utilizou-se um fator de sub-relaxação nas primeiras iterações do filtro, reduzindo a correção do estado, até que a linearização do modelo estivesse mais próxima do real. Isto foi feito pois existe a possibilidade de divergência do filtro caso as oscilações sejam muito grandes (4).

Apesar do aumento da taxa de convergência ao utilizar a matriz de transição, o correto ajuste dos parâmetros do filtro continua sendo um fator crucial para o sucesso do FEK. O ajuste dos parâmetros para uma determinada situação não garante que o filtro irá convergir para o estado correto em qualquer situação, principalmente quando o modelo adotado apresenta erros. Para contornar isto, pode ser utilizado o filtro de Schmidt-Kalman para identificar e/ou corrigir os parâmetros da matriz de transição do sistema de forma iterativa ao mesmo tempo que o filtro estima o estado do sistema (29). Outra possibilidade é utilizar um *shaping filter* para modelar o ruído no estado e/ou as incertezas dos modelos caso estes não apresentem comportamento gaussiano, que é uma das hipóteses básicas assumidas nos filtros de Kalman.

Apesar da capacidade de estimação de estado em sistemas não lineares, o FEK necessita de uma linearização do sistema a cada iteração e os efeitos de segunda ordem são desprezados. De fato, o FEK é considerado sub-ótimo para sistemas não lineares(35). Em 1996, Julier e Uhlmann(35) apresentaram uma nova abordagem para o filtro de Kalman chamada pelos autores de *unscented Kalman filter* (UKF), que tem como vantagem tratar o problema de estimação sem a necessidade de linearizar o modelo do sistema. Com este método, os autores mostram que as estimativas da média e covariância do estado estimado possuem erros de quarta ordem, enquanto que no FEK os erros são de segunda e quarta ordem respectivamente.

O UKF considera um conjunto finito de estados escolhidos deterministicamente e os transforma através da função não linear que representa a evolução temporal do

estado e da função não linear que relaciona as medidas com o estado. Com estes estados transformados, é possível estimar um estado médio e covariância da estimativa que são corretos até a quarta ordem. Como a transformação não linear é feita diretamente sobre os estados escolhidos, não é necessário determinar as matrizes jacobianas necessárias no FEK, assim até efeitos de descontinuidades podem ser levadas em conta.

Finaliza-se este trabalho concluindo que o método apresentado acrescenta uma linha de pesquisa na direção de identificar o modelo de evolução das condições pulmonares através do uso de imagens provenientes do próprio equipamento de tomografia.

REFERÊNCIAS

- 1 CHENEY, M.; ISAACSON, D.; NEWELL, J. C. Electrical impedance tomography. **Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 41, n. 1, p. 85–101, 1999.
- 2 VAUHKONEN, M.; KARJALAINEN, P. A.; KAIPPIO, J. P. A kalman filter approach to track fast impedance changes in electrical impedance tomography. **IEEE Transactions on Biomedical Engineering**, v. 45, n. 4, p. 486–493, 1998.
- 3 KAIPPIO, J. P.; KARJALAINEN, P. A.; SOMERSALO, E. State estimation in time-varying electrical impedance tomography. **Annals-New York Academy Of Sciences**, n. 873, p. 430–439, 1999.
- 4 TRIGO, F. C. **Estimação não linear de parâmetros através dos filtros de Kalman na tomografia por impedância elétrica**. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.
- 5 KIM, K. Y. et al. Image reconstruction in time-varying electrical impedance tomography based on the extended kalman filter. **Measurement Science and Technology**, n. 12, p. 1032–1039, 2001.
- 6 AMATO, M. B. P. et al. Effect of a protective-ventilation strategy on mortality in the acute respiratory distress syndrome. **New England Journal of Medicine**, v. 338, n. 6, p. 347–354, 1998.
- 7 TRIGO, F. C.; LIMA, R. G.; AMATO, M. B. P. Electrical impedance tomography using the extended kalman filter. **IEEE Transactions on Biomedical Engineering**, v. 51, n. 1, p. 72–81, 2004.
- 8 AGUIERRE, L. A. **Introdução à Identificação de Sistemas**. 1º. ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2000.
- 9 FLEURY, A. T.; LIMA, R. G. **PME-5003 - Análise Modal e Identificação de Estruturas Mecânicas**. São Paulo: Escola politécnica da Universidade de São Paulo. Apostila.
- 10 VELHO, H. F. de C. **Problemas inversos: conceitos básicos e aplicações**. São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, Lab. de Computação e Matemática Aplicada. Apostila.
- 11 YORKEY, T. J.; WEBSTER, J. G.; TOMPKINS, W. J. Comparing reconstruction algorithms for electrical impedance tomography. **IEEE Transactions on Biomedical Engineering**, v. BME-34, n. 11, p. 843–852, 1987.
- 12 BATES, B. **A Visual Guide to Physical Examination**. Canada: Williams & Wilkins, 2004. Disponível em: <<http://www.library.mun.ca/hsl/docs/Bates.php>>.

- 13 BARBER, D. C.; BROWN, B. H. Applied potential tomography. **Journal of Physics E: Scientific Instruments**, v. 17, p. 723–733, 1984.
- 14 NOPP, P. et al. Dielectric properties of lung tissue as a function of air content. **Physics in Medicine and Biology**, v. 38, n. 6, p. 699–716, 1993.
- 15 ASSOCIATION FOR THE ADVANCEMENT OF MEDICAL INSTRUMENTATION. **Safe Current Limits for Electromedical Apparatus, ANSI/AAMI ES 1-1993**. Arlington, 1993.
- 16 BROWN, B. H. Medical impedance tomography and process impedance tomography: a brief review. **Measurement Science and Technology**, v. 12, p. 991–996, 2001.
- 17 SYLVESTER, J.; UHLMANN, G. A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. **The Annals of Mathematics**, v. 125, n. 1, p. 153–169, 1987.
- 18 BROWN, B. H.; SEGAR, A. D. The sheffield data collection system. **Clin. Phys. Physiol. Measurement**, v. 8, n. A, p. 91–97, 1987.
- 19 MALMIVUO, J.; PLONSEY, R. **Bioelectromagnetism - Principles and Applications of Bioelectric and Biomagnetic Fields**. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- 20 AYA, J. C. C. et al. Regularizations for a black box back-projection eit algorithm. **Technology Meets Surgery International**, v. 1, 2005.
- 21 WELCH, G.; BISHOP, G. An introduction to the kalman filter. **ACM SIGGRAPH Association for Computing Machinery's Special Interest Group on Graphics**, University of North Carolina, Los Angeles, n. curso 8, 2001.
- 22 KIM, K. Y. et al. Dynamic imagem reconstruction in electrical impedance tomography with known internal structure. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 38, n. 2, p. 1301–1304, 2002.
- 23 HOLTZMAN, J. M. **Nonlinear System Theory - A Functional Analysis Approach**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1970.
- 24 HUA, P.; WOO, E. J.; WEBSTER, J. G.; TOMPKINS, W. J. Finite element modeling of electrode-skin contact impedance in electrical impedance tomography. **IEEE Transactions on Biomedical Engineering**, v. 40, n. 4, p. 335–343, 1993.
- 25 CHENG, K. S.; ISAACSON, D.; NEWELL, J. C.; GISSER, D. G. Electrode models for electric current computed tomography. **IEEE Transactions on Biomedical Engineering**, v. 36, n. 9, p. 918–924, 1989.
- 26 TRIGO, F. C. **Filtro Estendido de Kalman Aplicado à Tomografia por Impedância Elétrica**. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.
- 27 LOGAN, D. L. **A First Course in the Finite Element Method**. Boston: PWS-KENT Publishing Company, 1986.

- 28 BROGAN, W. L. **Modern Control Theory**. 3º. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1991.
- 29 MAYBECK, P. S. **Stochastic models, estimation and control**. 1º. ed. New York: Academic Press Inc., 1979.
- 30 PETERSEN, K. B.; PEDERSEN, M. S. **The Matrix Cookbook**. Technical University of Denmark, 2006. Version 20051003. Disponível em: <<http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/p.php?3274>>.
- 31 EWINS, D. J. **Modal Testing: Theory and Practice**. 1º. ed. New York: Research Studies Press LTD., 1984.
- 32 NETO, L. S. F. **Um método para análise modal de estruturas submetidas a excitações ambientes**. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.
- 33 MOURA, F. S. et al. A black-box back projection algorithm for electrical impedance tomography. **International Congress of Mechanical Engineering**, 2005.
- 34 NAN, P. C. **Algoritmo de Tomografia por impedância elétrica para uso clínico baseado em identificação direta da matriz de sensibilidade**. São Paulo: [s.n.], 2005. Trabalho de formatura.
- 35 JULIER, S.; UHLMANN, J. **A General Method for Approximating Nonlinear Transformations of Probability Distributions**. 1996. Relatório técnico, RRG, Dept. of Engineering Science, University of Oxford. Disponível em: <citeseer.ist.psu.edu/julier96general.html>.
- 36 PRESS, W. H.; FLANNERY, B. P.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T. **Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing**. 2º. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.